Trabajo Fin de Máster

"Enseñanza de funciones en Matemáticas académicas de 3º E.S.O: una propuesta didáctica"

"Teaching functions in Academics Mathematics of 3 E.S.O: a didactical proposal"

Autor/es

Esther Fuertes Muñoz

Director/es

Carmen Julve Tiestos

Facultad de Educación

2018

Índice

A.- Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1.- Nombra el objeto matemático a enseñar

El objeto matemático a enseñar son funciones y, concretamente, sus características:

- Definición de función.
- Formas de expresar una función (enunciado, ecuación, tabla de valores, gráfica).
- Características (dominio y recorrido, continuidad, puntos de corte, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, periodicidad, simetría, función par y función impar).

2.- Indica el curso y asignatura en la que sitúo el objeto matemático

Este objeto matemático lo sitúo en la asignatura de matemáticas académicas de 3º E.S.O.

3.- ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociados al objeto matemático pretendes enseñar?

CAMPOS DE PROBLEMAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
1º.- CONCEPTO DE FUNCIÓN	Correspondencia entre dos conjuntos.	Definición.
2º.- CAMBIOS ENTRE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN		
De enunciado a expresión algebraica.	Escribir algebraicamente la relación de la variable dependiente e independiente dada en el enunciado.	Definición.
De enunciado a tabla.	Hacer una tabla de valores con la	Definición.

	relación de la variable dependiente e independiente dada en el enunciado.	
De enunciado a gráfica.	Primero hacer la tabla de valores y después representar estos puntos en los ejes de coordenadas.	Definición y representación.
3º.- ESTUDIO DE CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN		
Dominio y recorrido de una función (dada por su gráfica).	Dominio: intervalo de valores de la función en el eje de coordenadas X. Recorrido: intervalo de valores de la función en el eje de coordenadas Y.	Definición y representación.
Continuidad de una función (dada por su gráfica).	No hay que levantar el boli para dibujar la función en su dominio.	Definición y representación.
Cortes con los ejes de una función (dada por su gráfica).	Corte con el eje X: los puntos que corta la función en este eje, que serán del tipo (x, 0). Corte con el eje Y: los puntos que corta la función en este eje, que serán del tipo (0,f(x)).	Definición y representación.
Crecimiento/ decrecimiento de una función (dada por su gráfica).	En un intervalo (x_1, x_2), la función es creciente si y_2 es mayor que y_1 y decreciente si y_2 es menor que y_1.	Definición y representación.
Máximos y mínimos de una función (dada por su gráfica).	Máximos: puntos de la función donde cambie de creciente a decreciente. Mínimos: puntos de la función donde cambie de decreciente a creciente.	Definición y representación.

Periodicidad de una función (dada por su gráfica).	Una función es periódica si está formada por un dibujo repetido sucesivas veces.	Definición y representación.
Simetría de una función (dada por su expresión algebraica y su gráfica).	Con la ecuación: Simetría respecto al eje Y: f(-x) = f(x). Simetría respecto al origen: f(-x) = - f(x). Con la gráfica: Simetría respecto al eje Y: si reflejando el 1º y 4º cuadrante en el eje Y queda el mismo dibujo que lo que había en el 2º y 3º. Simetría respecto al origen: Si reflejamos 1º respecto al eje Y y después respecto al X para que quede lo mismo.	Definición y representación.

B.- Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1.- ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Según la orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, lo que hay que ver en 3º E.S.O. de las matemáticas académicas sobre el objeto "Funciones", se encuentra en el bloque 4 de dicho curso cuyo nombre es "Funciones":

- Análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias.
- Análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente.

- Análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados.
- Utilización y modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica.
- Expresiones de la ecuación de la recta.
- Funciones cuadráticas. Representación gráfica. Utilización para representar situaciones de la vida cotidiana.

En este bloque se pueden observar dos partes. Una primera parte sobre las características de las funciones y una segunda parte sobre las funciones lineales y cuadráticas. En este trabajo se tratará la primera parte de este bloque, cuyo contenido será:

- Definición de función.
- Formas de expresar una función:
  - Por un enunciado.
  - Por una expresión algebraica.
  - Por una tabla de valores.
  - Por una gráfica.
- Características de una función:
  - Dominio y recorrido.
  - Continuidad.
  - Puntos de corte.
  - Crecimiento y decrecimiento.
  - Máximos y mínimos.
  - Periodicidad.
  - Simetría, función par y función impar.

Habitualmente se introduce el objeto matemático explicando directamente la definición de función, como lo hacen en el libro de **Santillana Serie Resuelve**:

Una **función** es una relación entre dos magnitudes o variables numéricas, x e y, de forma que a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

La variable x se denomina **variable independiente**, y la variable y, **variable dependiente**.

Y en el **CIDEAD**:

"*Una función es una relación de causa-efecto entre dos cantidades matemáticas: a iguales causas, iguales efectos.*

*La causa se denomina **variable independiente** y se denota con la letra **x**. El efecto es la **variable dependiente**, que se indica con la letra **y**.*

*Frecuentemente, en lugar de la letra **y** se utiliza la expresión **f(x)** (o **g(x)**, ...) para dar a entender que **y** efectivamente **depende** del valor de **x**."*

O primero definen lo que es una correspondencia entre dos conjuntos, qué son dos magnitudes dependientes y luego se define la función, como lo hace el libro de **SM "Pitágoras":**

Una **correspondencia** entre dos conjuntos es cualquier **relación** que se establece **entre los elementos** de esos conjuntos.

En una correspondencia se llama **conjunto inicial** al conjunto de partida, y **conjunto final** al conjunto de llegada.

Dos conjuntos o magnitudes son **dependientes** entre sí cuando los valores del primero determinan los valores que toma el segundo y viceversa.

En matemáticas, cuando existe una relación de **dependencia** entre dos magnitudes se dice que se puede expresar una magnitud **en función** de la otra.

Esta forma de introducir el objeto matemático es muy abstracta para la edad de los alumnos, debería introducirse con ejemplos de funciones de la vida cotidiana, donde descubran la relación entre dos magnitudes.

2.- ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Los **libros analizados** para conocer qué campos de problemas se enseñan habitualmente y con qué técnicas y tecnologías son:

- Aína Martínez, J.M., Alonso Borrego, J.L., Cabezón Ochoa, M.A., Fernández Rubio, J.I., García Cebrían, M.J., Herrero Izquierdo, J., Ruíz Gil, C. (2009). ***Matemáticas 3º ESO***. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/
- Grence Ruiz, T., de la Prida Almansa, C., Gaztelu Villoria, A.M., González García, A., Machín Polaina, P., Pérez Saavedra, C., Sánchez Figueroa, D. (2015). ***Matemáticas Enseñanzas académicas 3º ESO. Serie Resuelve***. Madrid: **Santillana**.
- Vizmanos, J.R., Anzola, M., Bellón, M., Hervás, J.C. (2011). **Matemáticas 3º ESO. Pitágoras**. Madrid: **Grupo SM**.

Y los **campos de problemas** en estos libros, como se pueden ver en el **Anexo 1**, son los siguientes:

CAMPOS DE PROBLEMAS	SANTILLANA	SM	CIDEAD
1º.- CONCEPTO DE FUNCIÓN.			
Dada por su enunciado.	X		X
Dada por su gráfica.	X	X	X
Dada por su tabla.	X		
2º.- CAMBIOS ENTRE SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN			

De enunciado a expresión algebraica.	X	X	
De enunciado a tabla.	X	X	
De tabla a gráfica.	X	X	
De enunciado a expresión algebraica, tabla y gráfica.	X	X	X
3º.- CÁLCULO DE IMAGEN Y ANTIIMAGEN			
Cálculo del valor de una función en un punto (imagen) (dada por su expresión algebraica).	X		
Cálculo de la imagen y la antiimagen de una función (dada por su gráfica).			X
4º.- ESTUDIO DE CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN			
Dominio de una función (dada por su expresión algebraica).	X		X
Dominio y recorrido de una función (dada por su enunciado).	X		
Dominio y recorrido de una función (dada por su gráfica).	X	X	X
Continuidad de una función (dada por su gráfica).	X	X	X
Cortes con los ejes de una función (dada por su gráfica).	X		
Cortes con los ejes de una función (dada por su expresión algebraica).	X		X
Tasa de variación de una función (dada por su gráfica).		X	
Crecimiento/decrecimiento de una función (dada por su gráfica).	X	X	X
Máximos y mínimos de una función (dada por su gráfica).	X	X	X
Periodicidad de una función (dada por su gráfica).	X	X	X
Simetría de una función (dada por su expresión algebraica).	X	X	
Estudio de una función (dominio, crec./decrec., máx/mín).		X	
Estudio una función (dominio/recorrido, puntos de corte, crecim./decrec., máx/mín, periodicidad, simetría).	X		

Como podemos ver en la tabla, el libro más completo es el de Santillana. Pero en los tres libros, más que problemas, hablaríamos de ejercicios. Sólo ejercitan prácticas descontextualizadas en su mayor parte. Se busca que aprendan por repetición y memorísticamente.

Y las **técnicas y tecnologías** asociadas a dichos campos de problemas son:

CAMPO DE PROBLEMAS	TÉCNICA	TECNOLOGÍA

Concepto de función (dada por su enunciado).	Relación de conjuntos con una variable independiente y otra dependiente. A cada valor de la variable independiente sólo le corresponde un valor de la variable dependiente.	Definición.
Concepto de función. (dada por su gráfica).	Representación en los ejes de coordenadas cartesianas (x, y) donde y depende de x. A cada x le corresponde un solo y.	Definición y representación.
Concepto de función (dada por su tabla).	Cada valor de x se corresponde con un único valor de y que se representa en una tabla de valores de dos columnas.	Definición.
Cambio sistema representación (de enunciado a expresión algebraica).	Escribir algebraicamente la relación de la variable dependiente e independiente dada en el enunciado.	Definición.
Cambio sistema de representación (de enunciado a tabla).	Hacer una tabla de valores con la relación de la variable dependiente e independiente dada en el enunciado.	Definición.
Cambio sistema de representación (de enunciado a gráfica).	Primero hacer la tabla de valores y después representar estos puntos en los ejes de coordenadas.	Definición y representación.
Cálculo del valor de una función en un punto (imagen) (dada por su expresión algebraica).	Sustituir el valor de x donde hay que encontrar el valor de la imagen en la ecuación de la función.	Definición.
Cálculo de la imagen y la antiimagen de una función (dada por su gráfica).	Imagen: el valor de y para un valor de x sobre la gráfica. Antiimagen: valores de x para un valor de y sobre la gráfica.	Definición y representación.
Dominio de una función (dada por su expresión algebraica).	Valores de x a los que se les puede aplicar las operaciones de la expresión algebraica.	Definición.

Dominio y recorrido de una función (dada por su enunciado).	Dominio: valores que puede tomar la variable independiente. Recorrido: valores que puede tomar la variable dependiente.	Definición.
Dominio y recorrido de una función (dada por su gráfica).	Dominio: valores que toma la gráfica en el eje de las X. Recorrido: valores que toma la gráfica en el eje de las Y.	Definición y representación.
Continuidad de una función (dada por su gráfica).	Cuando no se levanta el boli del papel para dibujarla.	Definición y representación.
Cortes con los ejes de una función (dada por su gráfica).	Cortes con el eje x: puntos que el valor de y es 0. Corte con el eje y: punto que el valor de x es 0.	Definición y representación.
Cortes con los ejes de una función (dada por su expresión algebraica).	Cortes con el eje x: resolver $f(x) = 0$. Corte con el eje y: calcular $f(0)$.	Definición.
Tasa de variación de una función (dada por su gráfica).	La tasa de variación en una función entre dos puntos x_1 y x_2 es la diferencia en y en esos dos puntos ($f(x_2) – f(x_1)$)	Definición y representación.
Crecimiento/decrecimiento de una función (dada por su gráfica).	Crecimiento en un intervalo (x_1, x_2) si el valor de $f(x_2) > f(x_1)$. Decrecimiento en un intervalo (x_1, x_2) si el valor de $f(x_2) < f(x_1)$.	Definición y representación.
Máximos y mínimos de una función (dada por su gráfica).	Máximo: $f(x)$ pasa de creciente a decreciente en ese punto. Mínimo: $f(x)$ pasa de decreciente a creciente en ese punto.	Definición y representación.
Periodicidad de una función (dada por su gráfica).	Si la gráfica se repite a intervalos regulares.	Definición y representación.
Simetría de una función	Simetría respecto al eje Y: $f(-x) = f(x)$.	Definición.

(dada por su expresión algebraica).	Simetría respecto al origen: f(-x) = - f(x).	

3.- ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

La enseñanza que se observa en estos libros es primero explicar la técnica y aplicarla a muchos ejercicios. Se aprenden los conceptos por repetición, no intentando entender el significado, lo que produce los errores observados en distintos estudios.

En el artículo de Ortega, T., & Pecharromán, C. (2014). **Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones**. Revista de Investigación en Educación nº12 (2). 209-221, se recapitulan los errores observados en un estudio de alumnos de 4º E.S.O., a través de cuestionarios, el desarrollo de la docencia y en entrevistas con los alumnos. Aunque el estudio se ha realizado con alumnos de 4º E.S.O., algunos son errores que ya tendrán los de 3º E.S.O. Estos errores son:

- Errores relacionados con la interpretación de los símbolos y convenios del sistema de referencia cartesiano, y la representación de puntos en el plano.
- Errores en el uso de la notación de intervalos numéricos.
- Dificultades para distinguir entre la variable independiente y la dependiente y para saber en qué eje se representa cada una.
- Se observan errores por interpretar los extremos como puntos más altos o más bajos respecto al eje de abscisas, o también por su posición relativa respecto al eje de abscisas.
- Se utiliza el mismo criterio de extremo absoluto para los máximos y para los mínimos, “el más alto”, lo que hace que el mínimo absoluto lo señalen como el más cercano al eje de abscisas y es erróneo.
- En las propiedades de la simetría, un importante número de alumnos cambia la denominaciones, par – impar, debido a que se ha llevado a cabo un aprendizaje memorístico.
- Representación numérica incompleta de los puntos de corte y de los extremos.
- Errores en la formación de intervalos.

Y, en el libro de Azcárate Giménez, C., Deulofeu Piquet, J. (1996). **Funciones y gráficas.** *De Colecciones Matemática: Cultura y Aprendizaje*. Madrid: Síntesis, se nombran los problemas de los alumnos en la interpretación de gráficas:

- Errores en la graduación de los ejes.
- Inversión en el orden de las coordenadas.
- Errores en la lectura y representación de puntos de coordenadas racionales: fracciones y decimales, sobre todo negativas.
- Dificultad de pasar de interpretación punto a punto a una interpretación global.

También hay que tener en cuenta que el concepto de continuidad que se les enseña en este curso (continuidad = no levantar el boli para dibujar la gráfica de la función) provoca una ruptura didáctica en posteriores cursos. Debería explicarse que debe ser en su dominio.

C.- Sobre los conocimientos previos del alumno

1.- ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Los conocimientos previos que necesita el alumno son, sobre este objeto:

- cómo se representan puntos en un sistema de coordenadas.
- qué es un intervalo de números.
- variable dependiente e independiente.

Y, respecto a otros objetos:

- saber escribir la ecuación a partir de un enunciado (y=f(x)) y hallar los valores de y, sabiendo los de x.
- números (enteros, fracciones, decimales).
- recta de los números.
- fórmulas geométricas de áreas y volúmenes.

2.- La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Este objeto matemático ya se empieza a trabajar con los alumnos desde **6º de Primaria,** donde uno de los contenidos del currículo de Primaria (R.D.126/2014) es: "Sistema de Coordenadas cartesianas. Descripción de posiciones y movimientos".

Y, posteriormente, según el currículo de secundaria, en la E.S.O. (R.D.489/2016). En **1º E.S.O.,** donde está el bloque 4 "Funciones" cuyos contenidos son:

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).
- Funciones de proporcionalidad directa. Representación.

En **2ª E.S.O.** también existe un bloque 4 "Funciones", donde se repiten unos contenidos de primero y se amplían otros:

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.
- Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

Y se volverá a tener un bloque 4 "Funciones" en **4º E.S.O.** cuyos contenidos serán:

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica.
- Análisis de resultados.

- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo.
- Reconocimiento de otros modelos funcionales: aplicaciones a contextos y situaciones reales.

Las ecuaciones también se ven desde 1º E.S.O, donde en el Bloque 2 "Números y Álgebra" del currículo aragonés del R.D. 489/2016, ya abordan las ecuaciones de primer grado con una incógnita. Y en 2º E.S.O., también en el Bloque 2 "Números y Álgebra":

- Iniciación al lenguaje algebraico.
- Traducción de expresiones del lenguaje cotidiano, que representen situaciones reales, al algebraico y viceversa.
- El lenguaje algebraico para generalizar propiedades y simbolizar relaciones. Obtención de fórmulas y términos generales basada en la observación de pautas y regularidades. Valor numérico de una expresión algebraica.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas. Transformación y equivalencias. Identidades. Operaciones con polinomios en casos sencillos.
- Ecuaciones de primer grado con una incógnita (métodos algebraico y gráfico) y de segundo grado con una incógnita (método algebraico). Resolución. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones sin solución. Resolución de problemas.

Y en 3º E.S.O., una unidad anterior es sobre este objeto también:

- Investigación de regularidades, relaciones y propiedades que aparecen en conjuntos de números. Expresión usando lenguaje algebraico.
- Ecuaciones de segundo grado con una incógnita. Resolución (método algebraico y gráfico).
- Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

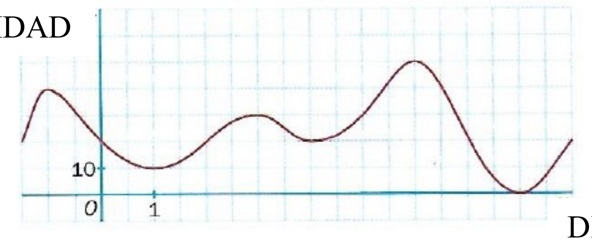
Así que, viendo los currículos, los alumnos sí deberían tener todos los conocimientos previos necesarios. Tendremos que asegurarnos de que así ha sido al comenzar a enseñar la unidad.

3.- ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Para asegurar que los alumnos poseen esos conocimientos previos, realizaré dos pruebas en la primera sesión, a modo de evaluación inicial:

- **Kahoot**, haciendo preguntas con todos los conceptos que deberían haber adquirido los años anteriores:
    - ¿En qué cuadrante se encuentra el punto (-1,4)? (Posibles respuestas: 1º, 2º, 3º o 4º).
    - ¿Para x= 9, cuánto vale la función f(x)= x·(x -13)? (Posibles respuestas: 36, -45, -36, 45).
    - La gráfica muestra la velocidad de un coche de montaña rusa durante una vuelta, ¿en qué tramos estará yendo cuesta arriba?

VELOCIDAD



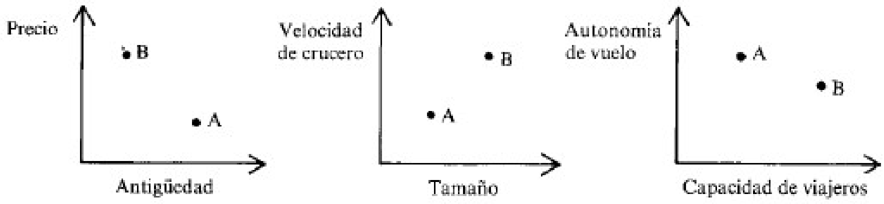
DISTANCIA

(Posibles respuestas: (-3, -2) U (1, 5) U (7, 11) U (15, 17), (-2, 1) U (5, 7) U (11, 15), (20, 40) U (10, 30) U (20, 50) U (0, 20), (40, 10) U (30, 20) U (50, 0)).

- ¿Cuál es la función que describe: Supermario al conseguir una moneda gana 0,75 € y la partida comienza con 0,50 €? (Posibles respuestas: f(x) = 0,50 + 0,75x, f(x) = 0,75 + 0,50x, f(x) = 0,75x, ninguna es correcta).
- ¿Cuál es la función que describe la relación entre un lado de un cubo y su volumen? (Posibles respuestas: f(x) = 3x, f(x) = x^2, f(x) = x^3, ninguna es correcta).

- Una hoja de ejercicios, para hacer en clase, para comprobar sus conocimientos previos y ver si cometen los errores que he nombrado en el apartado B.3:
    - Ejercicio 1: Dibujar unos ejes de coordenadas y colocar los puntos (-1, 3). (1,3), (1/2, -3/4).

- Ejercicio 2: Dibujar una gráfica que corte a los ejes en los puntos: (0, -2), (3,0) y (7,0).
- Ejercicio 3: Las siguientes gráficas describen las características de dos aviones A y B:



Contesta a las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el avión más caro?

b) ¿Es el avión más caro el más antiguo?

c) ¿Es el avión más caro el de mayor tamaño?

d) ¿Es el avión más caro el que tiene mayor autonomía de vuelo?

e) ¿Es el avión más antiguo el que tiene mayor capacidad de viajeros?

Después, estudiaré los resultados, para saber el punto de partida, para que todos los alumnos puedan seguir el contenido.

D.- Sobre las razones de ser del objeto matemático

1.- ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

La razón de ser de las funciones que voy a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático es la de que actúa como instrumento de modelización de relaciones de la vida real entre dos variables, una dependiendo de la otra.

Esta relación de variables se verá en enunciados, expresiones algebraicas, tablas y gráficas. Todas las características de las funciones las introduciré a través de las representaciones gráficas, tanto por el hecho de que las gráficas constituyen una forma de conocimiento y de transmisión de la información básica en nuestro mundo actual, como también porque a través de este lenguaje es posible construir nuevos conceptos, de una forma intuitiva y visual, que lentamente permitirán elaborar una idea general del concepto de función, basándome en Azcárate Giménez, C., Deulofeu Piquet, J. (1996). Funciones y gráficas. *De Colecciones Matemática: Cultura y Aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

2.- ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Esta razón de ser de las funciones, y la forma de introducirlas, coincide con la razón histórica que dio origen al objeto.

Hay una cierta unanimidad en considerar cinco grandes periodos relativos al tratamiento de funciones basándonos en Ortega, T., & Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. Revista de Investigación en Educación nº12 (2). 209-221 y Sastre Vázquez, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* Vol (*16)*. 141-155.:

Edad Antigua, caracterizada por las primeras representaciones gráficas y la búsqueda de regularidades:

Por Edad Antigua se consideran las civilizaciones mesopotámicas de la Antigüedad, que de forma genérica conocemos como babilónicas y la civilización griega.

Los matemáticos babilónicos utilizaban **tablas** que solían estar dispuestas en dos columnas para anotar los datos de las observaciones astronómicas, no limitándose a una simple tabulación de datos empíricos sino también trabajaron con interpolaciones tanto lineales como geométricas, buscando **regularidades**.

En la matemática griega, la distinción entre el número y magnitud dificultó ir hacia el concepto de función, ya que la idea de magnitud variable no podía expresarse mediante números más que en ciertos casos particulares impidiendo la relación entre números y magnitudes.

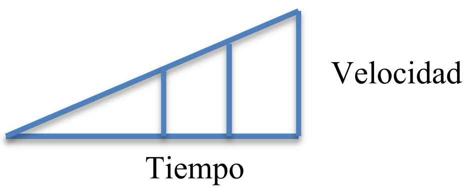
Sin embargo, encontramos tablas astronómicas en el Almagesto de Ptolomeo (85-165) y una cierta introducción de coordenadas en las Cónicas de

Apolonio (262-190 a.C.) con la consideración sistemática de un par de diámetros conjugados que son equivalentes a un **sistema de coordenadas** oblicuas.

I. <u>Edad Media, donde destacan las aportaciones de Nicolás de Oresme:</u>

La **primera idea de función** aparece en las escuelas de Filosofía de Oxford y París, las traducciones de las obras de Aristóteles (384-322 a.C.) pusieron de actualidad el estudio del cambio en general. En el Merton College de Oxford se dedujo una **"fórmula"** de la velocidad de cambio conocida como regla de Merton que equivale a la ecuación del espacio en función del tiempo en el movimiento uniformemente acelerado.

Nicolás de Oresme (1323-1382) introduce las **coordenadas**, preocupado por la representación de la velocidad de un móvil a lo largo del tiempo, para lo cual traza un segmento horizontal cuyos puntos representan los sucesivos instantes de tiempo (longitudes) y para cada instante traza un segmento particular (latitud) cuya longitud representa la velocidad en aquel instante.



Este tipo de representaciones recuerdan mucho a la **representación gráfica** de una función sobre unos ejes cartesianos.

II. <u>Siglos XV, XVI y XVII, con el desarrollo del concepto en las obras, entre otros, de Descartes, Newton y Leibniz:</u>

La obra de Vieta (1540-1603) con la creación del Álgebra simbólica y la de Galileo con el establecimiento de las leyes del movimiento abrieron vías para poder establecer relaciones funcionales, pero es **Descartes** quien habla explícitamente de **relaciones funcionales** manifestando por primera vez el hecho de que **una ecuación en x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables** de manera que a partir de ella es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra.

Las funciones consideradas por Descartes eran sobre todo expresiones algebraicas definidas por curvas geométricas simples.

Con Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716) se llega a la representación de funciones en series infinitas de potencias, lo que hizo posible la representación analítica de la mayoría de las funciones que se utilizaban en esa época.

III. <u>Siglo XVIII, con la consideración del concepto de función como central en matemáticas, en las obras de Bernoulli y Euler:</u>

En los matemáticos posteriores a Descartes surgió la idea de que los métodos de la Geometría Analítica eran válidos no solamente para todas las funciones elementales sino que se podían aplicar también a las funciones algebraicas generales.

Se pone entonces el **énfasis en la representación de una función mediante su expresión algebraica**.

J.Bernoulli (1718):"llamamos **función** de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que se de esta magnitud variable y de constantes."

En su Introductio in Analysis Infinitorum, **Euler** define una **función** como "una expresión analítica formada de cualquier manera a partir de una cantidad variable y números o cantidades constantes."

En sus Institutiones Calculi Differentialis de 1755, desaparece la restricción de expresión analítica y aparece una nueva definición: "si x es una cantidad, entonces toda cantidad que dependa de x de cualquier manera o que está determinada por aquélla, se llama una función de dicha variable".

IV. <u>Siglos XIX y XX, con la generalización de concepto de función:</u>

El concepto de función se fue convirtiendo poco a poco en el concepto clave del nuevo Análisis.

Cauchy (1789-1857) en su definición utiliza los términos variable independiente y variable dependiente: "cuando unas cantidades variables están ligadas entre ellas de tal manera que, dando el valor de una de ellas se puede deducir el valor de las otras, concebimos de ordinario estas diversas cantidades expresadas por medio de la variable independiente son las que llamamos funciones de esta variable."

Dirichlet (1805-1859) es el que define en 1837 el concepto de función tal y como lo utilizamos actualmente:"si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente x".

3.- Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático.

He diseñado dos problemas. Con el primer problema, de la vida cotidiana, los alumnos, construirán el modelo y averiguarán la dependencia entre las dos magnitudes coste envío y peso del paquete. De una función dada por su enunciado, pasarán a tabla y a gráfica, viendo así las distintas formas de expresar una función. Con las preguntas intentaré que se den cuenta los alumnos que mediante una gráfica o una tabla de valores podemos tener mucha información. Y con el segundo, además, se pueden introducir las características de una función: dominio, recorrido, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos y periodicidad.

Problema 1: "LAS AGENCIAS DE TRANSPORTE":

Las agencias de transporte cobran distinto importe por los paquetes que recogen en un sitio y envían a otro, según el peso del paquete.

La agencia SEUR tiene la siguiente tarifa:

Hasta 3kg, cobra 5,53 €

De 3 a 5kg, cobra 6,29 €

De 5 a 10 kg, cobra 8,19 €

La agencia NACEX tiene la siguiente tarifa:

Hasta 2kg, cobra 5,15 €

De 2 a 5 kg, cobra 6,08 €

De 5 a 8 kg, cobra 6,49 €

De 8 a 10 kg, cobra 9.49 €

Y la agencia CORREOS EXPRESS tiene la siguiente tarifa:

Hasta 1 kg, cobra 4,71 €

De 1 a 2 kg, cobra 4,94 €

De 2 a 3 kg, cobra 5,17 €

De 3 a 4 kg, cobra 5,41€

De 4 a 5 kg, cobra 5,55 €

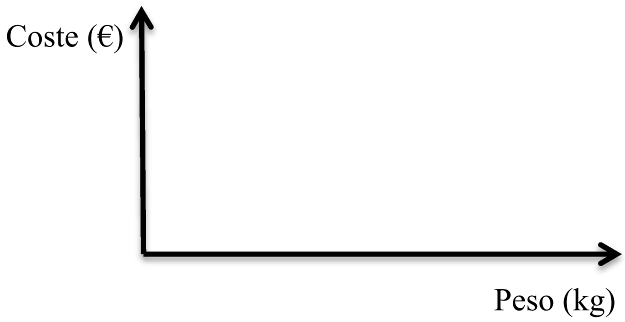
De 5 a 10 kg, cobra 9,12 €

Completa la tabla siguiente, del coste de envío de cada compañía en función del peso de un paquete:

		Peso paquete (Kg)				
		0 a 1	1 a 2	2 a 3	3 a 4	4 a 5
Coste	SEUR					
	NACEX					
	CORREOS					

		Peso paquete (Kg)				
		5 a 6	6 a 7	7 a 8	8 a 9	9 a 10
Coste	SEUR					
	NACEX					
	CORREOS					

Representa gráficamente el coste en función del peso del paquete para cada compañía.



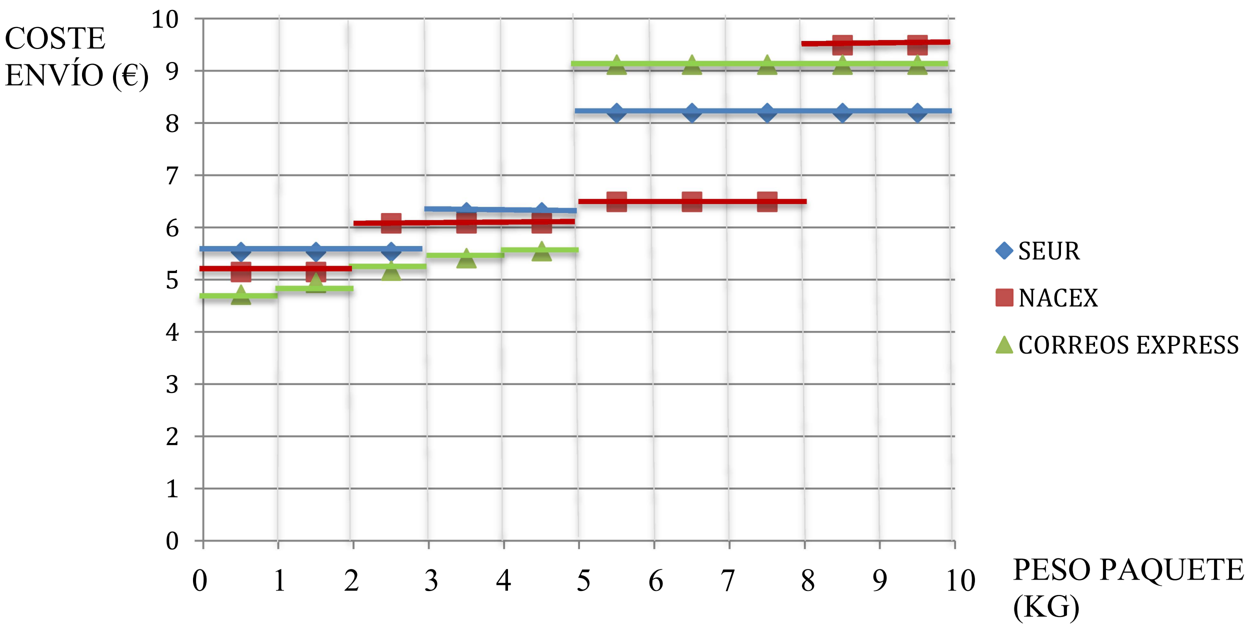
¿Qué compañía elegirías para paquetes de 0,5kg?

¿Para qué peso de paquete, es NACEX la mejor opción?

SOLUCIÓN:

		Peso paquete (Kg)				
		0 a 1	1 a 2	2 a 3	3 a 4	4 a 5
Coste envío	SEUR	5,53	5,53	5,53	6,29	6,29
	NACEX	5,15	5,15	6,08	6,08	6,08
	CORREOS	4,71	4,94	5,17	5,41	5,55

		Peso paquete (Kg)				
		5 a 6	6 a 7	7 a 8	8 a 9	9 a 10
Coste envío	SEUR	8,19	8,19	8,19	8,19	8,19
	NACEX	6,49	6,49	6,49	9,49	9,49
	CORREOS	9,12	9,12	9,12	9,12	9,12



Para un paquete de 0,5 kg elegiría a Correos Express.

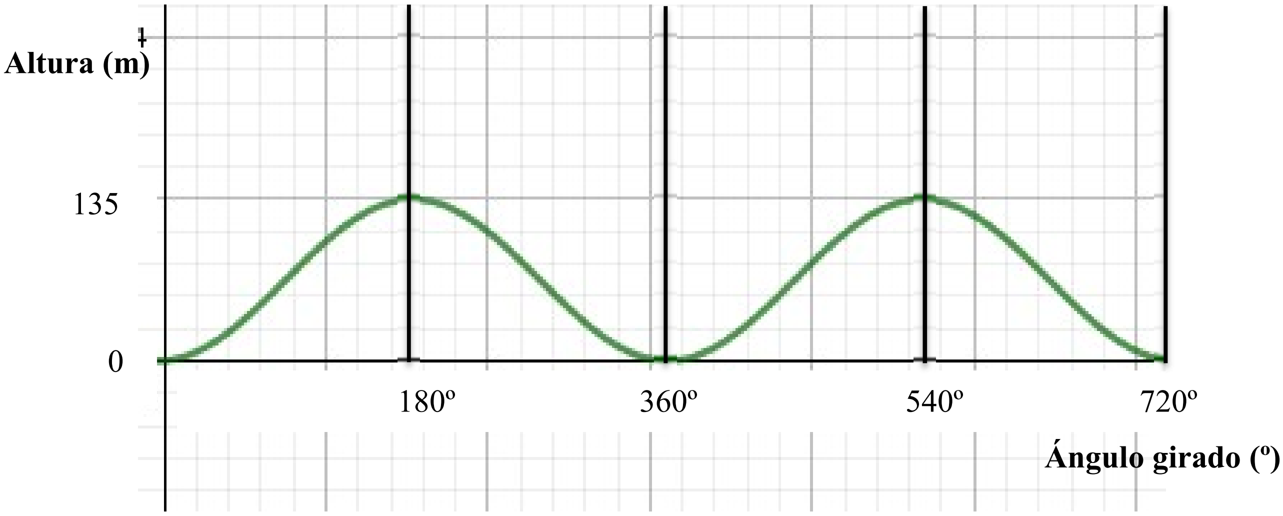
NACEX es la mejor opción si los paquetes pesan entre 5 y 8 kg.

Problema 2: "La noria"

El London Eye es una noria-mirador de Londres, abierta al público en el año 2000.Tiene una altura de 135 m.

Representa gráficamente la altura de una cabina en función del ángulo girado en la noria. A la noria se sube en la posición más baja de la cabina, consideramos ahí 0m de altura y 0º de giro. Representa dos vueltas completas de la cabina.

SOLUCIÓN:



4.- Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La metodología será: crear grupos heterogéneos de 3 alumnos y presentar el primero de los problemas. Dar tiempo para que razonen entre ellos y busquen la solución. El profesor dará la ayuda que vayan demandando, haciéndoles preguntas que les haga descubrir las respuestas. Posteriormente, se discutirá el ejercicio entre todos los alumnos y el profesor. Por último, el profesor hará la institucionalización de los conceptos que se han descubierto con el problema.

A continuación, se haría de la misma manera con el segundo problema.

E.- Sobre el campo de problemas

Para diseñar los problemas y ejercicios se han tenido las indicaciones aprendidas en los apuntes de la asignatura "Diseño, organización y desarrollo de actividades para el aprendizaje de Matemáticas", dando especial importancia al acercamiento a las funciones a través de su expresión verbal y gráfica, que es más asequible para los alumnos y permite dedicarse a los conceptos y no simplemente al cálculo.

1.- Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula

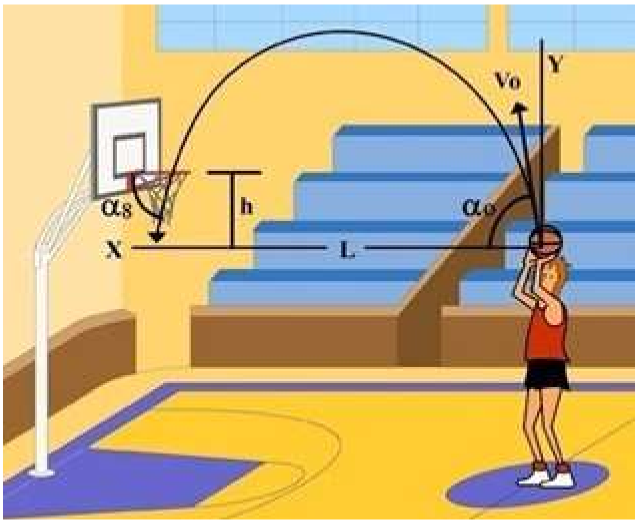
Los **campos de problemas** que se van a presentar en el aula son los siguientes:

1. Concepto de función
2. Cambios entre sistemas de representación
3. Estudio de características de una función dada por una gráfica

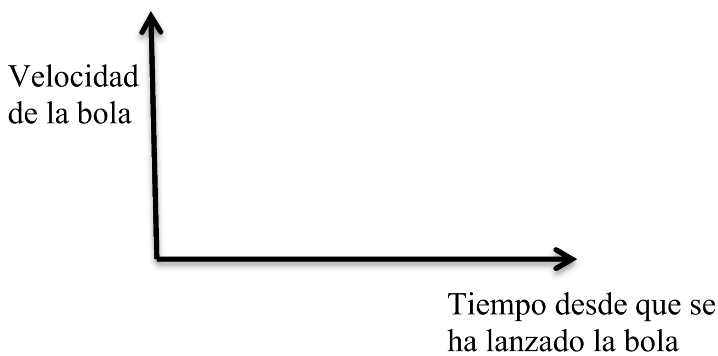
Campo de problemas 1: Concepto de función

Se diseñan distintos problemas para que estudien situaciones de la vida cotidiana y encuentren las funciones que hay en ellas.

Problema 1: ¿Cómo cambia la velocidad de la bola cuando va por el aire hacia la canasta?



Dibuja la gráfica:



Problema 2: Imagínate que las últimas vacaciones estuviste en un parque de atracciones y te montaste en una montaña rusa como la que se ve en la imagen.

Explícale a tu compañero cómo es el circuito para que él lo pueda dibujar. Después, entre los dos, pensad en qué tramos ibas más rápidos y en cuales más lento y dibujad la gráfica velocidad frente a distancia recorrida.

Problema 3: Hay que construir una conejera rectangular con 22 m de valla metálica. El dueño está interesado en saber cómo depende el área cercada por la valla de la longitud de la conejera. Piensa sobre esta situación y discútela con tu compañero.

L

<u>Campo de problemas 2: Cambio entre sistemas de representación</u>

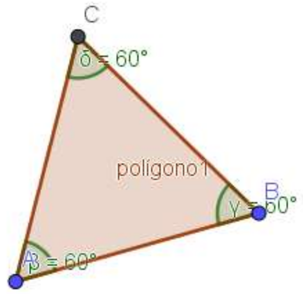
Se diseñan distintos problemas para que estudien las distintas formas en las que pueden aparecer las funciones en situaciones de la vida cotidiana.

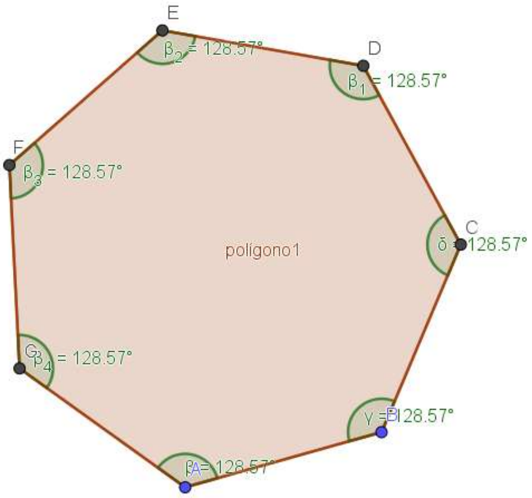
Problema 4: Un turista llega a Zaragoza, el autobús le deja en la Plaza España. De ahí va andando, por la calle Don Jaime I a la Plaza del Pilar. Está una hora y media viendo la Basílica. Después se va andando, por Paseo Echegaray hasta el Palacio de la Aljafería. La visita al Palacio dura dos horas y después se queda a comer allí, durante una hora más. Después ya se tiene que dirigir a la Estación de Delicias, para coger el autobús para irse a casa otra vez. Representa la gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo, ayudándote de **Google Maps**.

Problema 5: Busca en **Google** la temperatura media mensual durante el último año en Zaragoza (Búsqueda: temperatura media Zaragoza). Copia la tabla de temperaturas medias máximas y mínimas que aparece en función del mes. Realiza la gráfica de estas dos funciones.

Problema 6: El alquiler de un autobús de 50 plazas nos cuesta 300 €. Calcularemos el precio del billete repartiendo equitativamente el coste del autobús entre los que vayamos a la excursión. Cuantas más personas vayamos, menos nos tocará pagar a cada uno. Realiza la tabla y la gráfica para comprobarlo en **Excel.**

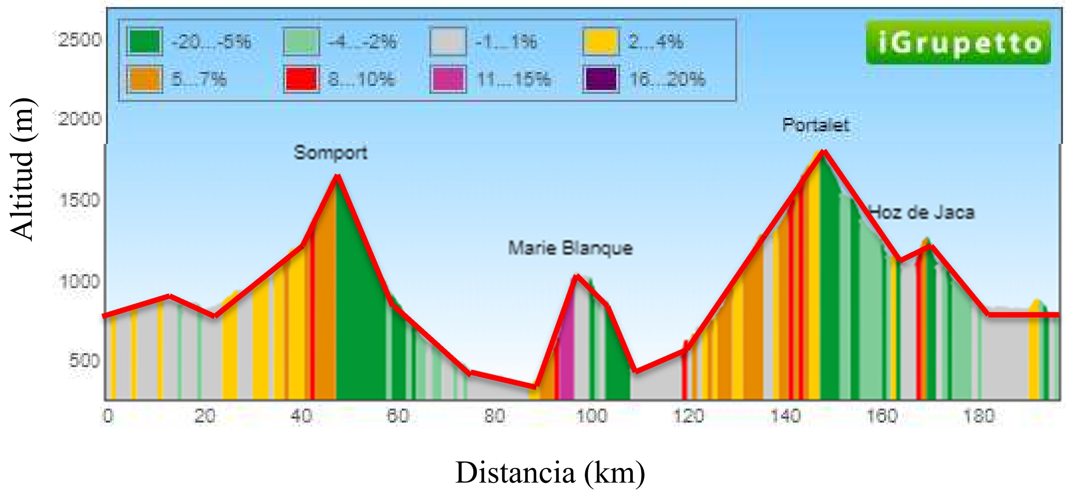
Problema 7: Abre el documento "polígonos regulares" de **Geogebra** y moviendo el deslizador (lados), averigua cómo depende el tamaño de los ángulos interiores el número de lados? Haz una tabla que relacione estas dos variables. Halla la expresión algebraica que modeliza esta situación.





Campo de problemas 3: Estudio de características de una función

Problema 8: En la siguiente gráfica se muestra el perfil de la famosa carrera ciclista "Quebrantahuesos" de 200 km.



Haciendo caso a la simplificación del perfil que es la línea roja, contesta:

a) ¿Cuántos km tiene esta carrera?

b) ¿Cuál es la altitud menor que se alcanza? ¿Y la mayor?

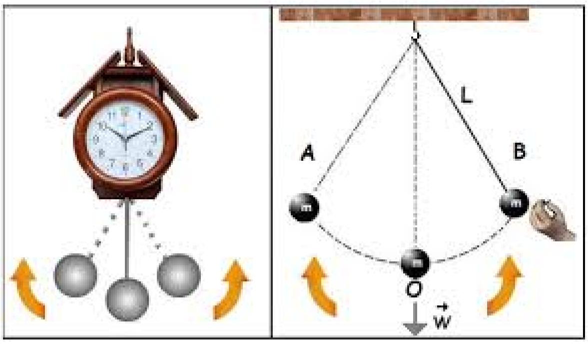
c) ¿Cuál es el pico más alto y en qué punto kilométrico y a qué altitud está? ¿Qué otros picos hay en esta carrera? ¿En qué puntos?

d) ¿En qué intervalos de la carrera van los ciclistas cuesta arriba? ¿Y cuesta abajo? ¿Y en llano?

e) ¿A qué altura está en el kilómetro 40?

f) ¿En qué kilómetros se está a 1000 metros de altitud?

Problema 9: El péndulo del reloj que tenemos en la imagen tarda en moverse de "A" a "O" medio segundo, de "O" a "B" otro medio segundo, de "B" a "O" otro medio segundo, de "O" a "A" otro medio segundo y así sucesivamente.



a) Si en "O" está el péndulo a altura cero y en A y en B está a 5 cm de altura, dibuja la gráfica de la altura a la que está el péndulo en función del tiempo.
b) ¿Cuál es la altura mínima a la que se encuentra el péndulo?
c) ¿Y la máxima?
d) ¿Cada cuánto tiempo se repite la gráfica?

2.- Modificaciones de la técnica inicial que van a exigir la resolución de dichos problemas.

Campo de problemas 1: Concepto de función

La técnica utilizada en los libros estudiados es la de ver si existe relación entre dos conjuntos (dos variables) y que a cada valor del conjunto inicial sólo le corresponda un valor del conjunto final.

La propuesta con estos problemas, es que dibujen la función en el **problema 1**, que en el **problema 2** un alumno le pueda definir verbalmente una función a su compañero y que en el **problema 3** lleguen a encontrar la ecuación en forma de tabla y de ecuación sin haber definido el concepto.

Campo de problemas 2: Cambio entre sistemas de representación

La técnica utilizada en los libros es:

- Si la función es dada por enunciado, identificar las dos variables y de ahí calcular la ecuación o construir la tabla de valores de esas dos variables.

- Si la función es dada por ecuación o ya la hemos calculado, construir la misma tabla.
- Si la función es dada por una tabla de valores o ya la hemos calculado, se harán los ejes coordenados y se representarán los puntos de la tabla.

La técnica que utilizaré en los problemas de este campo será prácticamente la misma. En el **problema 4** del enunciado tendrán que identificar las variables, hacer la tabla de valores y posteriormente la gráfica. En los **problema 5 y 6** pasarán de tabla a gráfica. El problema 7 es en el único que varía un poco la técnica, primero se hará la tabla y, a partir de ella, intentarán encontrar la ecuación.

Campo de problemas 3: Estudio de características de una función

En los libros analizados las técnicas utilizadas son:

- Dominio: el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente.
- Recorrido: el conjunto de todos los valores que pueden tomar la variable dependiente.
- Continuidad: una función es continua si puede dibujarse sin levantar el boli.
- Puntos de corte: Gráficamente son los puntos de intersección con los ejes de coordenadas. Si es a partir de la ecuación, los puntos de corte con el eje X se hallan resolviendo la ecuación $f(x) = 0$ y el punto de corte con el eje Y se halla calculando $f(0)$.
- Crecimiento y decrecimiento: una función, dada por una gráfica, es creciente en (a, b) si $f(b)$ es mayor que $f(a)$, es decreciente si $f(b)$ es menor que $f(a)$ y es constante si $f(b) = f(a)$.
- Máximos y mínimos: gráficamente, hay un máximo en un punto si la función pasa de creciente a decreciente en ese punto y hay un mínimo si la función pasa de decreciente a creciente.
- Periodicidad: si la gráfica de la función se va repitiendo, la función es periódica.
- Simetría: para ver si una función es simétrica respecto al eje de ordenadas, hay que calcular $f(-x)$ y ver si coincide con $f(x)$. Para ver si una función es

simétrica respecto del origen de coordenadas, hay que calcular f (-x) y ver si coincide con - f(x).

En los **problemas 8 y 9**, todas las características se encontrarán a partir de la gráfica de la función, para que sea más intuitivo el comprender el significado de cada característica.

El dominio serán todos los valores de la función en el eje X y recorrido en el eje Y. Recalcando que hay que ir de negativos a positivos (de menor a mayor).

Los máximos se explicarán en el **problema 8**, serán los picos de la etapa.

También en el **problema 8**, se explicarán los intervalos de crecimiento como las “cuestas arriba” de la etapa y los de decrecimiento como las “cuestas abajo”.

Y en el **problema 9**, al dibujar la gráfica, se verán los máximos como en el ejercicio anterior y se encontrarán los mínimos como los opuestos a los máximos, los máximos están donde de subida se pasa a bajada y los mínimos de bajada se pasa a subida. La función se verá que es periódica porque una parte de su gráfica se repite.

3.- Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Los **problemas 1, 2, 3, 8 y 9** se realizarán en el aula. Se repartirán las fotocopias con los problemas y se harán grupos heterogéneos de 3 alumnos. Los grupos trabajarán para intentar resolver los problemas.

El profesor irá pasando por los grupos, para ver qué respuestas están encontrando y resolver las posibles dudas que tengan los alumnos.

Una vez que el profesor vea que la mayoría ha obtenido la solución, se discutirá la respuesta entre todos. Y cuando hayan encontrado la solución entre todos, y todos lo entiendan, el profesor realizará el proceso de institucionalización.

Que los problemas sean de situaciones reales y dejar que descubran las respuestas antes de explicar las definiciones hará que entiendan mejor los conceptos y no tener que aprender todo de memoria y por repetición.

Los **problemas 4, 5, 6 y 7** se realizarán en el aula de informática. Se colocarán de dos alumnos en cada ordenador. Se repartirán las fotocopias con los enunciados y folios para que escriban las respuestas.

El resto de metodología es igual a los anteriores problemas. En estos problemas introduzco distintas herramientas TIC: Google Maps, buscador de Google, Excel y Geogebra. La mayoría de los alumnos ya conocerán alguna de estas herramientas como Google o Excel e incluso Google Maps pero así aprenderán todos a usarlas todos y verán cómo las matemáticas están en todo lo que hacen.

Con todos estos problemas descubrirán la importancia de las funciones y sus distintas formas de representar, ya que las funciones en forma de tabla o de gráfica dan mucha información y más rápidamente que verbalmente. No se incide mucho en la función como ecuación pues ya se profundizará en siguientes cursos, cuando sepan derivar.

F.- Sobre las técnicas

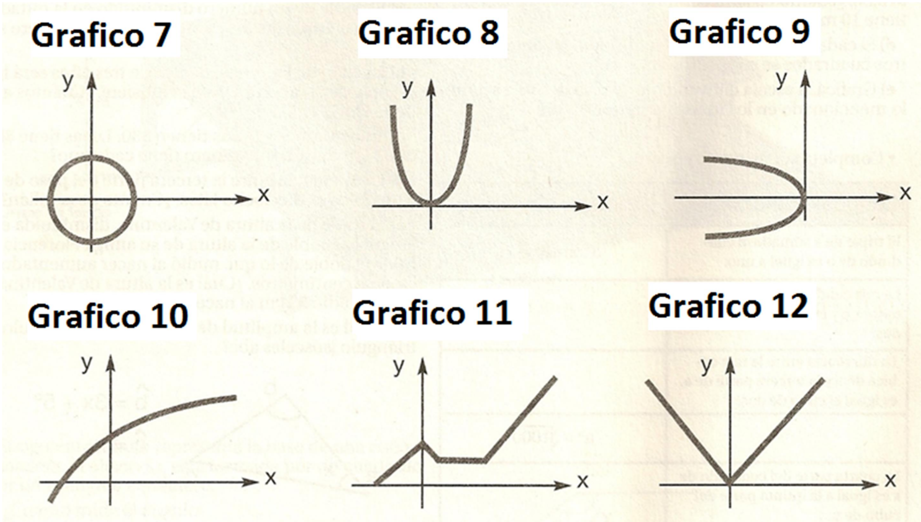
1.- Tipos de ejercicios a presentar en el aula

Se harán ejercicios para afianzar los tres campos de problemas mencionados en el apartado anterior.

<u>Campo de problemas 1: Concepto de función</u>

Se diseñan distintos problemas para que estudien si son funciones o no. Las posibles funciones se darán en forma de gráficas, enunciados, tablas y ecuaciones.

Ejercicio 1: ¿Cuáles de las siguientes gráficas se pueden obtener al dibujar una función?



Ejercicio 2. ¿Cuáles de los siguientes enunciados se pueden expresar en forma de función?

a) Para pasar de centímetros a pulgadas se multiplica por 2/5

b) A cada número, sus divisores

c) A cada persona, el día de su nacimiento

d) A cada persona, el nombre de sus hijos

e) A cada hijo, el nombre de su padre

f) La relación entre el peso y la altura de las personas

Ejercicio 3. ¿Cuáles de las siguientes tablas se corresponden con una función?

a)

x	y
0	0
1/4	2
1/2	1
2/8	3

b)

x	y
0	0
1	2
2	2

3	3

Ejercicio 4. ¿Son funciones las siguientes expresiones algebraicas?

a) $f(x) = 3x + 2$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = x^2$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

Campo de problemas 2: Cambio entre sistemas de representación

Se diseñan una batería de ejercicios para afianzar los conocimientos de las distintas formas de definir una función.

Ejercicio 5. Construye una tabla de valores para la función que a cada número lo relaciona con:

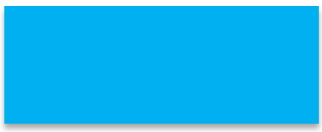
a) su triple menos dos unidades

b) la suma de su cuadrado y dos unidades

c) su número opuesto y tres unidades

Ejercicio 6. A partir de las tablas del ejercicio anterior, representa las correspondientes funciones gráficamente.

Ejercicio 7. Escribe la expresión de las funciones que relacionan el lado x con el área y el perímetro del siguiente rectángulo:



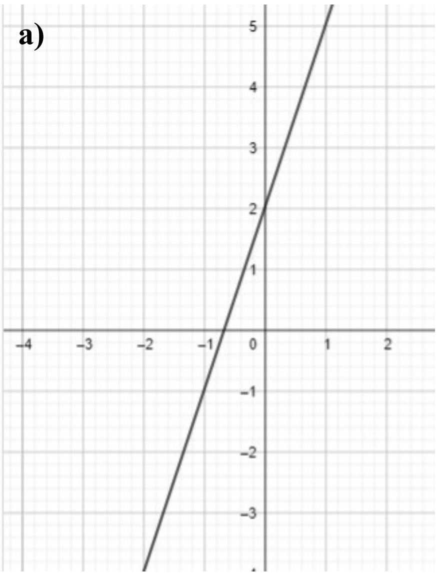
x/2

x

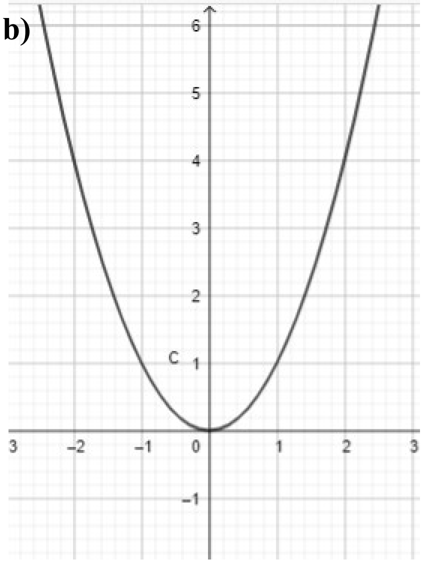
Ejercicio 8. A partir de las expresiones del ejercicio anterior, representa las funciones en forma de tablas y gráficas.

Ejercicio 9. Relaciona cada gráfica con la expresión algebraica de su función:

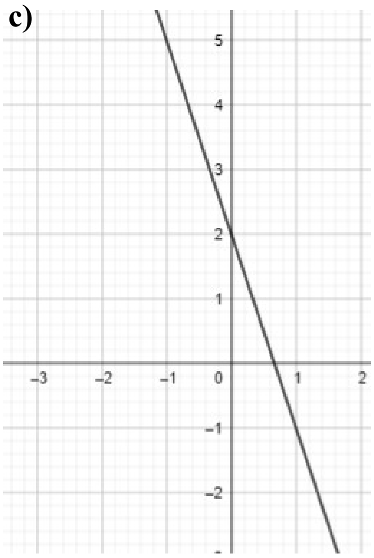
a)



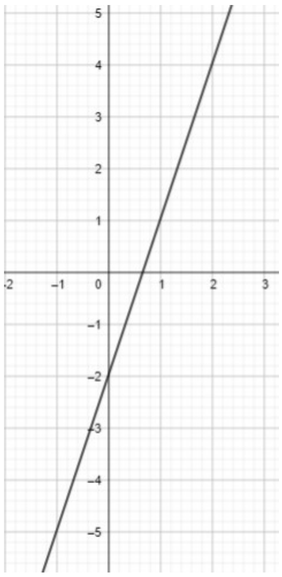
b)



c)



d)



1) $f(x) = -3x + 2$

2) $f(x) = 3x + 2$

3) $f(x) = x^2$

4) $f(x) = 3x - 2$

Campo de problemas 3: Estudio de características de una función dada por una gráfica

Ejercicio 10. Ejercicio de intervalos. Escribir en el buscador de internet la siguiente dirección: https://www.vitutor.com/di/re/r4e.html.

1 El intervalo $(2,\ 8)$ está formado por ...

- todos los números del 2 al 8 ambos inclusive.
- todos los números del 2 al 8, sin incluir ni el 2 ni el 8.
- los números 2 y 8.

2 El intervalo $[-3,\ 1)$ está formado por ...

- todos los números comprendidos entre −3 y 1 incluyendo el −3 pero no el 1.
- todos los números comprendidos entre −3 y 1 incluyendo el 1 pero no el −3.
- todos los números comprendidos entre −3 y 1 no incluidos por no ser cerrado el intervalo.

3 Escribir $(-2,\ -1)$ es equivalente a escribir ...

- $\{x \in \mathbb{R} : -2 < x < -1\}$
- $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < -2\}$
- $\{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq -1\}$

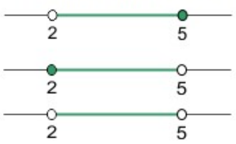
4 Escribir $\{x \in \mathbb{R} : 3 < x \leq 7\}$ es equivalente a ...

- $(3,\ 7)$
- $[3,\ 7)$
- $(3,\ 7]$

5 La expresión $\{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x < 5\}$ indica todos los números contenidos entre ...

- 3 y 5 incluyendo el 5 pero no el 3
- 3 y 5 incluyendo el 3 pero no el 5
- 3 y 5 ambos números inclusive

6 El intervalo $[2,\ 5)$ se corresponde a la representación gráfica ...



7 La representación gráfica 

indica ...

- cualquier número contenido entre 3 y 7 pero sin incluirlos.
- cualquier número contenido entre 3 y 7 ambos inclusive.
- cualquier número menor que 3 y mayor que 7.

8 La representación gráfica 

indica ...

- cualquier número menor que −3 y mayor que 2.
- cualquier número menor que −3 y mayor o igual a 2.
- cualquier número mayor que −3 y menor o igual a 2.

9 La representación gráfica 

se corresponde con la expresión ...

- $\{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 3\}$
- $\{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 3\}$
- $\{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x \leq -1\}$

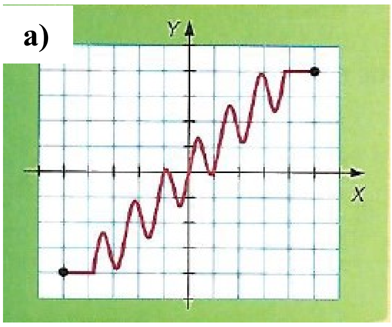
10 La representación gráfica 

se corresponde con ...

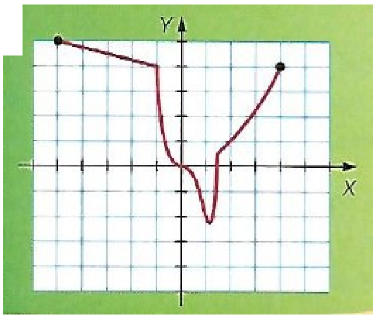
- (4, 12)
- [4, 12)
- (4, 12]

Ejercicio 11. Indica el dominio y recorrido de estas funciones:

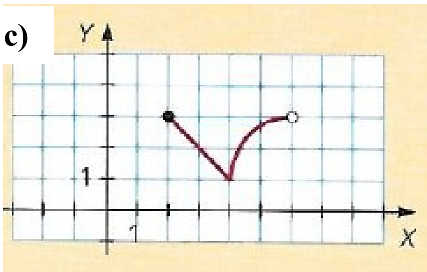
a)



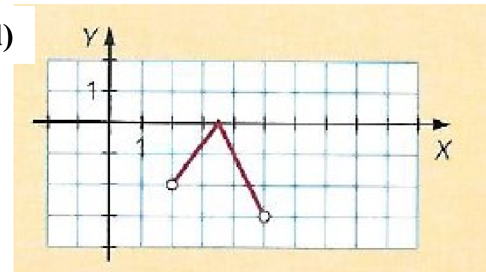
b)



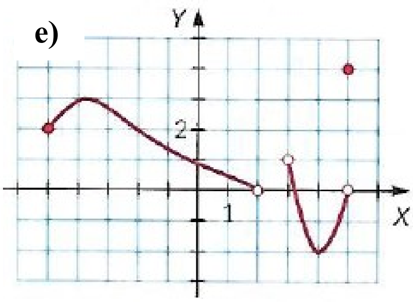
c)



d)



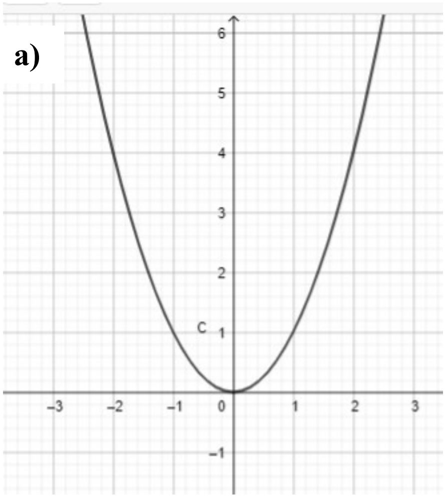
e)



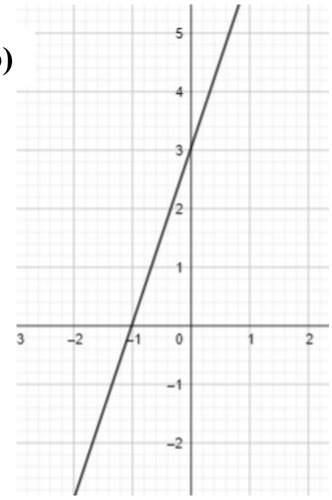
Ejercicio 12. ¿Cuáles de las funciones del ejercicio anterior son continuas?

Ejercicio 13. Indica cuáles son los puntos de corte de las siguientes funciones. Debes indicar si son puntos de corte con eje X, Y o ambos.

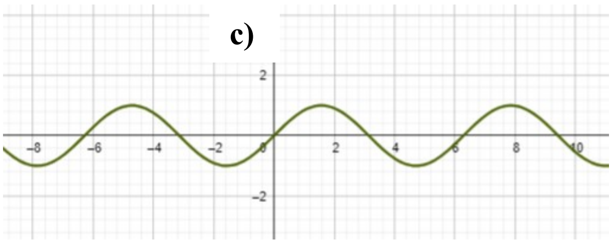
a)



b)



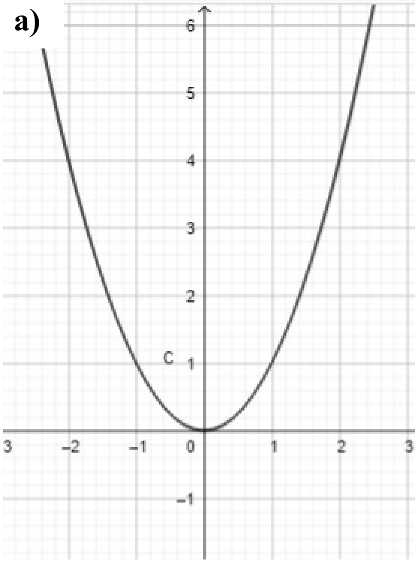
c)



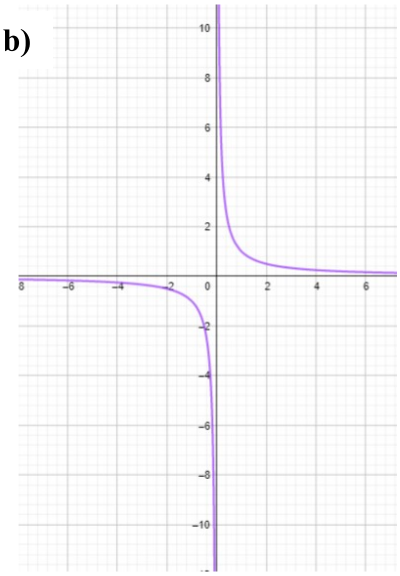
Ejercicio 14. Escribe los intervalos en los que la función es constante, creciente y decreciente de las funciones del ejercicio 11. ¿En qué puntos hay máximos y mínimos?

Ejercicio 15. ¿Qué funciones son periódicas o simétricas (respecto al eje Y o respecto al origen)?

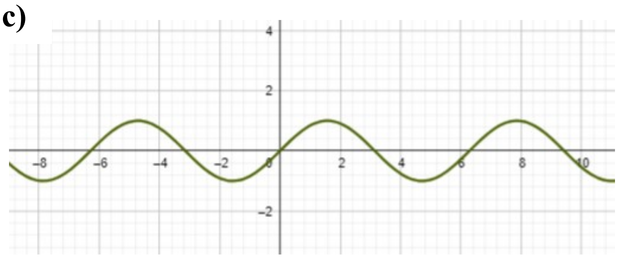
a)



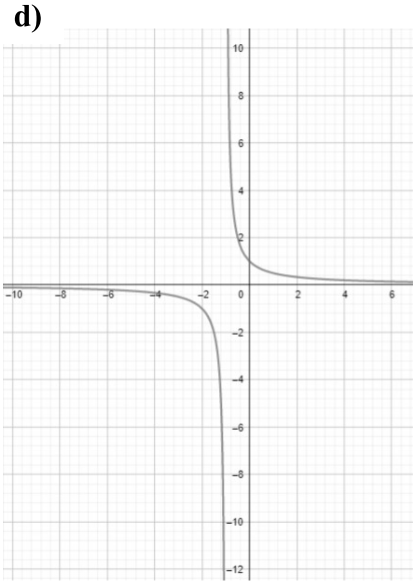
b)



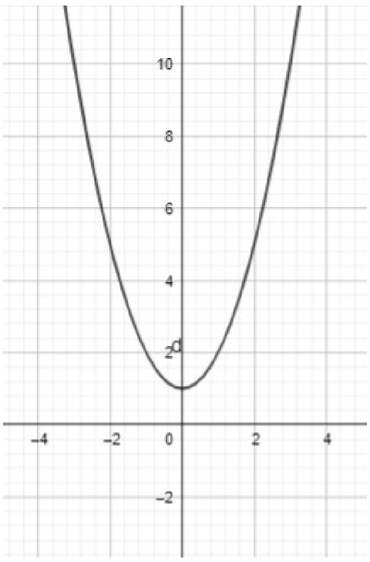
c)



d)



e)



2.- Técnicas o modificaciones de una técnica que se ejercitan con ellos

Campo de problemas 1: Concepto de función

La técnica utilizada en los libros estudiados es la de ver si existe relación entre dos conjuntos (dos variables) y que a cada valor del conjunto inicial sólo le corresponda un valor del conjunto final.

Los ejercicios del 1 al 4 seguirán la misma técnica, para practicar lo aprendido después de hacer los problemas de este campo.

Campo de problemas 2: Cambio entre sistemas de representación

La técnica utilizada en los libros es:

- Si la función es dada por enunciado, identificar las dos variables y de ahí calcular la expresión algebraica o construir la tabla de valores de esas dos variables.
- Si la función es dada por expresión algebraica o ya la hemos calculado, construir la misma tabla.
- Si la función es dada por una tabla de valores o ya la hemos calculado, se harán los ejes coordenados y se representarán los puntos de la tabla.

Las técnicas utilizadas en los ejercicios son las mismas que en los libros. Destacar en el ejercicio 9 que se pide relacionar gráficas con expresiones algebraicas para que sean capaces de hacer el paso de gráfica a tabla y de tabla a expresión algebraica o de expresión algebraica a tabla y de tabla a gráfica.

Campo de problemas 3: Estudio de características de una función

En los libros analizados las técnicas utilizadas son:

- Dominio: el conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente.
- Recorrido: el conjunto de todos los valores que pueden tomar la variable dependiente.
- Continuidad: una función es continua si puede dibujarse sin levantar el boli.

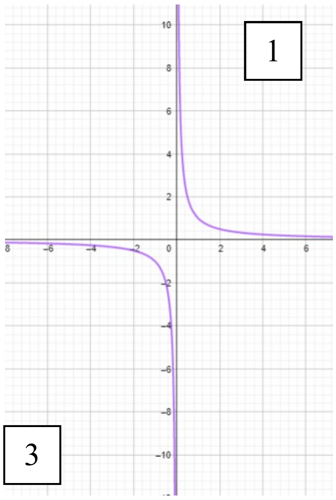
- Puntos de corte: Gráficamente son los puntos de intersección con los ejes de coordenadas. Si es a partir de la ecuación, los puntos de corte con el eje X se hallan resolviendo la ecuación $f(x) = 0$ y el punto de corte con el eje Y se halla calculando $f(0)$.
- Crecimiento y decrecimiento: una función, dada por una gráfica, es creciente en (a, b) si f(b) es mayor que f(a), es decreciente si f(b) es menor que f(a) y es constante si $f(b) = f(a)$.
- Máximos y mínimos: gráficamente, hay un máximo en un punto si la función pasa de creciente a decreciente en ese punto y hay un mínimo si la función pasa de decreciente a creciente.
- Periodicidad: si la gráfica de la función se va repitiendo, la función es periódica.
- Simetría: para ver si una función es simétrica respecto al eje de ordenadas, hay que calcular $f(-x)$ y ver si coincide con $f(x)$. Para ver si una función es simétrica respecto del origen de coordenadas, hay que calcular $f(-x)$ y ver si coincide con $-f(x)$.

El **primer ejercicio** de este campo de problemas es sobre intervalos abiertos y cerrados, que no es un concepto que diga la LOMCE que hay que enseñarlo pero es imprescindible que lo entiendan los alumnos y, como he dicho anteriormente, hay estudios que han encontrado que es un error que cometen frecuentemente. La técnica es que si queremos incluir el punto extremo de un intervalo se escribe con corchete y se representa gráficamente con un punto negro y si no queremos incluirlo se escribirá con un paréntesis y se representará gráficamente con un punto blanco.

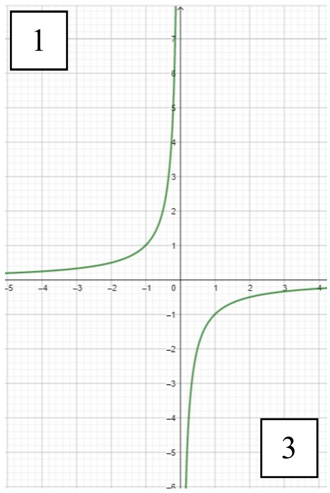
Los **demás ejercicios** serán resueltos con las mismas técnicas que en los libros que he analizado.

En el **ejercicio 15**, después de que hayan dicho las respuestas lo comprobaremos de otra manera. Entregaré una hoja con una función simétrica a cada alumno. Les diré que la calquen por detrás y el número del cuadrante también. Por ejemplo:

Cara 1:



Cara 2:



Se les pide que viendo la función de la cara 1, doblen la hoja por el eje Y (quedando la cara 1 en el interior). Se les pregunta si la función que tiene cada uno, ahora el cuadrante 1 está en la misma posición que el otro cuadrante que tiene parte de la función en la cara 1. Los que tienen la a) y e) han de decir que sí y se dice que son funciones simétricas respecto al eje Y, como si fuese un espejo. Los alumnos que no tenían una función par se les dice que ahora, teniéndola doblada, vayan rompiendo la hoja por la doblez hasta la mitad y doblen hacia fuera esa mitad que han rasgado y verán otra vez un cuadrante 1 y se les pregunta si es igual al otro cuadrante que tenían en su función y ahí han de decir que sí los que tengan la b) y la c). Así se explicará que esa es simétrica respecto al origen. A los que tienen la d) se les pide que la enseñen a sus compañeros para que vean que no cumplía ninguna de las dos condiciones.

3.- Dichas técnicas, ¿son adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Casi todas las técnicas son adecuadas para ejercitar los distintos campos de problemas una vez ya se han introducido con problemas que les den sentido en la vida real. El hacer ejercicios nos permite practicar más las técnicas que si sólo hiciésemos problemas, que hace falta más tiempo para resolverlos.

En la técnica de la continuidad habría que explicar que debe serlo en su dominio.

4.- Metodología a seguir en su implementación en el aula

El **ejercicio 10** se hará en el aula de ordenadores. Se hará sentar a dos alumnos por ordenador. Se les hará buscar la página web donde está el ejercicio que queremos hacer. Lo discutirán por parejas y lo irán completando. Después lo volveremos a empezar e iremos resolviendo entre todos las preguntas para ir explicando lo que significa paréntesis, corchete, circulo negro, círculo blanco… y que a todos los alumnos les quede claro para poder luego hacer los ejercicios de dominios y recorridos.

Los **ejercicios del 11 al 15** se realizarán en el aula. Se repartirán las fotocopias con los enunciados y se harán individualmente.

El profesor irá pasando por al lado de los alumnos, para ver qué respuestas están encontrando, resolver las posibles dudas que tengan los alumnos y ver qué aspectos aún no están entendidos.

Una vez que el profesor vea que la mayoría ha obtenido la solución, se discutirá la respuesta entre todos. El profesor repasará los aspectos que haya visto que iban fallando los alumnos al hacer los ejercicios.

Para terminar el **ejercicio 15** se hará lo que he explicado en la técnica con las hojas con las funciones que repartiré para explicar de otra manera las funciones simétricas.

G.- Tecnologías (justificación de las técnicas)

1.- Razonamientos para justificar las técnicas

<u>Campo de problemas 1: Concepto de función</u>

La tecnología que justifica la técnica en este campo de problemas es la propia definición de función: “Una función es una relación entre dos magnitudes o variables numérica, x e y, de forma que a cada valor de x le corresponde un único valor de y.

Campo de problemas 2: Cambio entre sistemas de representación

La tecnología que justifica la técnica en este campo de problemas es la definición de función en cada forma de representarla: "Las funciones se pueden expresar de 4 formas: con un **enunciado**, con una **tabla** (las variables x e y de una función se pueden escribir como pares de valores (x,y) que se obtienen de una tabla de valores, con una **gráfica** (los pares de una función, (x,y), indican puntos del plano en un sistema de coordenadas cartesianas. La representación de esos puntos es su gráfica. La variable independiente, x, se representa en el eje de abscisas y la variable dependiente, y, en el eje de ordenadas.) o con una **expresión algebraica** ($y=f(x)$)".

Campo de problemas 3: Estudio de características de una función

Las tecnologías que justifican las características de una función son sus definiciones:

- Dominio: "El conjunto de todos los valores que puede tomar la variable independiente."
- Recorrido: "El conjunto de todos los valores que pueden tomar la variable dependiente."
- Continuidad: "Una función es continua en los puntos de un intervalo si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo."
- Puntos de corte: "Los puntos de corte con los ejes de una función son los puntos de intersección de la gráfica con ambos ejes de coordenadas- Los puntos de corte con el eje X son de la forma (a,0) y el valor de a se calcula resolviendo la ecuación $f(x)=0$. El punto de corte con el eje Y, si existe, es de la forma (0,b) y el valor de b se calcula hallando $f(0)$, $f(0)=b$.
- Crecimiento y decrecimiento: "Dada una función $f(x)$ y los valores $x=a$ y $x=b$, tales que $a<b$:
    - Si $f(b) > f(a)$, la función es creciente entre a y b.
    - Si $f(b) < f(a)$, la función es decreciente entre a y b.
    - Si $f(b) = f(a)$, la función es constante entre a y b."
- Máximos y mínimos: "Una función continua tiene un máximo en el punto $x=a$ cuando pasa de ser creciente a decreciente en ese punto. Una función

continua tiene un mínimo en el punto x=a cuando pasa de ser decreciente a creciente en ese punto."

- Periodicidad: "Una función es periódica si su gráfica se repite cada cierto intervalo, llamado período. Es decir se cumple que $f(x) = f(x+T)=\dots$, siendo T el valor del período.
- Simetría: "Una función es simétrica respecto del eje de ordenadas, o función par, cuando $f(-x) = f(x)$. Una función es simétrica respecto del origen de coordenadas, o función impar, cuando $f(-x) = -f(x)$.

2.- ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

El profesor justificará las técnicas, una vez que los alumnos hayan resuelto los problemas y hayan discutido entre todos la solución correcta.

3.- Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Campo de problemas 1: Concepto de función

Una vez que los alumnos ya hayan intentado resolver los problemas 1, 2 y 3, y que hayan encontrado la solución entre todos, el profesor explicará la definición de función y repasará la solución de los problemas, para hacerles ver cuáles eran las funciones y por qué.

Campo de problemas 2: Cambio entre sistemas de representación

Una vez que los alumnos ya hayan intentado resolver los problemas 4, 5, 6 y7, y que hayan encontrado la solución entre todos, el profesor explicará las 4 formas de representar una función y dónde han salido en los problemas que han resuelto.

Campo de problemas 3: Estudio de características de una función

Una vez que los alumnos ya hayan intentado resolver los problemas 8 y 9, y que hayan encontrado la solución entre todos, el profesor explicará las características de las funciones y les hará ver dónde han ido saliendo cada una de ellas.

4.- Metodología a seguir en su implementación en el aula

Para institucionalizar los distintos aspectos de las funciones, la metodología a seguir en su implementación en el aula será la siguiente:

1. El profesor repartirá la fotocopia con los problemas que descubren el aspecto a tratar.
2. Los alumnos leen y se enfrentan al problema, sin haberles explicado el aspecto que queremos enseñarles.
3. En grupos de 3, buscan la solución al problema.
4. Una vez que el profesor ve que ya pueden salir las respuestas al problema, comienza la puesta en común de las respuestas y dirige la discusión.
5. El profesor realiza la institucionalización del aspecto del objeto que quería enseñar con los problemas.
6. Para practicar las técnicas, después, habrá que hacer los ejercicios que estén relacionados con el aspecto de las funciones que se tratase.

H.- Secuencia didáctica y su cronograma

1.- Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

SESIÓN	CONTENIDO	ACTIVIDAD
1	Evaluación inicial.	Kahoot.
		Prueba escrita.
2	Presentación del tema y razón de ser.	Problema "Las agencias de transporte" .
		Problema "La noria".
3	Campo de problemas 1: Concepto de función.	Problemas 1 a 3.
		Ejercicios 1 a 4.
4	Campo de problemas 2: Cambio entre sistemas de representación.	Problemas 4 a 7.

	Campo de problemas 3: Estudio de características de una función.	Ejercicio 10.
5	Campo de problemas 2: Cambio entre sistemas de representación.	Ejercicios 5 a 9.
	Campo de problemas 3: Estudio de características de una función	Problemas 8 y 9.
6	Campo de problemas 3: Estudio de características de una función.	Ejercicios 11 a 15.
7	Prueba de evaluación escrita	Prueba escrita.
8	2ª oportunidad evaluación y corrección.	Prueba escrita “corregida”.

2.- Establece una duración temporal aproximada.

Todas las sesiones son de 50 minutos. Y como se ve en la tabla del apartado anterior, dedicaremos 8 sesiones de clase y al ser 3º E.S.O que se dan 3 sesiones por semana, dedicaremos casi 3 semanas a esta unidad, que es un peso adecuado para este tema, equilibrado para que se pueda abordar todo el temario de este curso.

Todas las sesiones son en el aula habitual excepto la sesión 4 que será en el aula de ordenadores.

I.- Sobre la evaluación

1.- Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

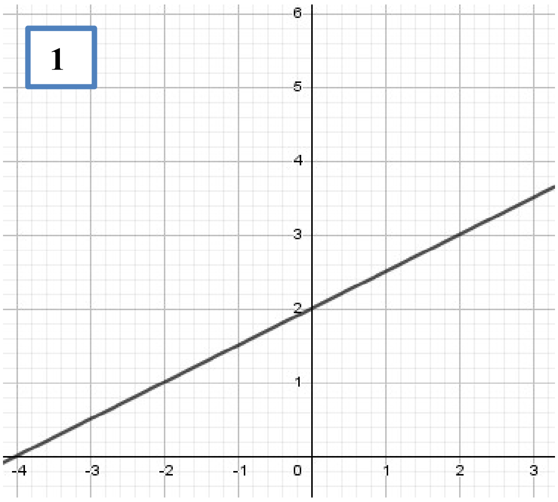
La prueba consiste en 5 preguntas, para que la duración aproximada de la prueba sea de una hora. Los ejercicios o problemas serán similares a los vistos en los campos de problemas.

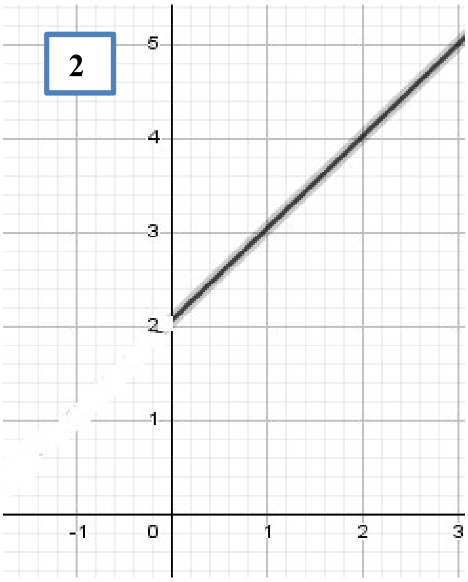
EJERCICIO 1.- **(1,5 puntos)** Asocia cada enunciado con una gráfica. Razona tus respuestas.

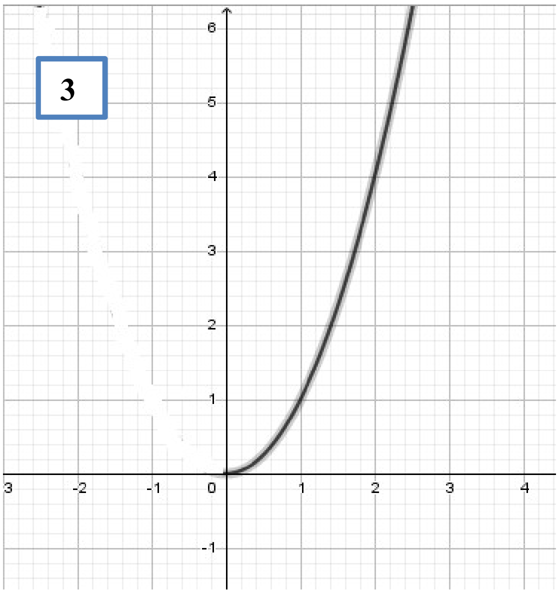
a) El área de un cuadrado en función de su lado.

b) A cada número le corresponde su mitad más 2.

c) Los taxis de Zaragoza cobran 2,05 € por la bajada de bandera y 0,98 € por cada km. Recorrido.







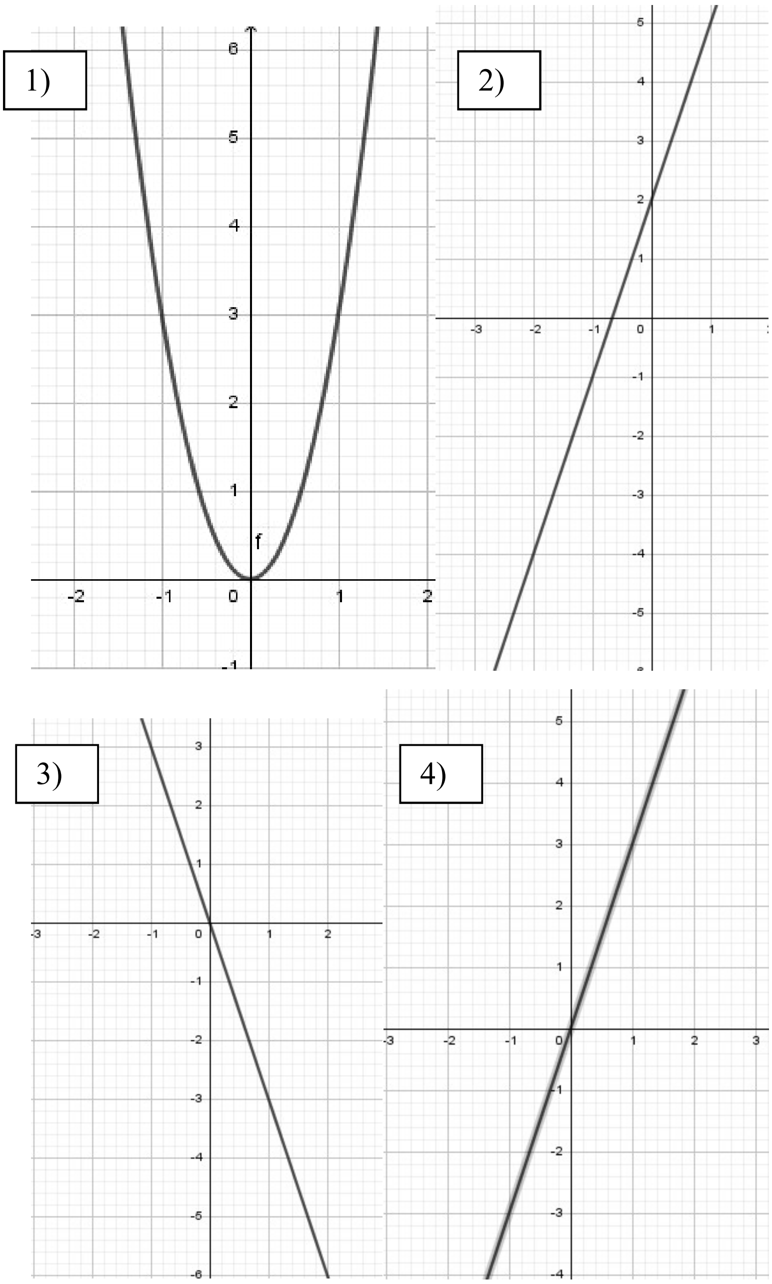
EJERCICIO 2.- (2 puntos) Asocia las siguientes funciones expresadas en forma de ecuación con su forma de expresión gráfica. Razona tus respuestas.

a) $f(x) = 3x$

b) $f(x) = 2 + 3x$

c) $f(x) = -3x$

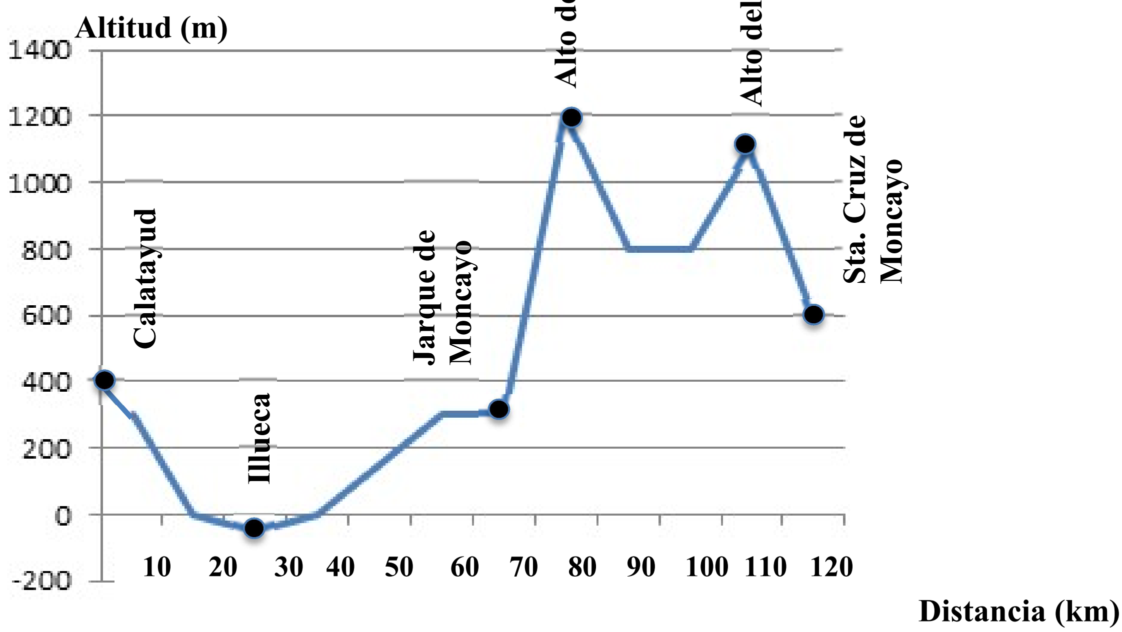
d) $f(x) = 3x^2$



EJERCICIO 3.- (1,5 puntos) Dada la función "un vendedor de muebles tiene un sueldo fijo de 1000 € y, por cada mueble que vende, cobra 100 € de comisión (de variable), exprésala:

a) Por una expresión algebraica.
b) Por una tabla de valores.
c) Mediante una gráfica.

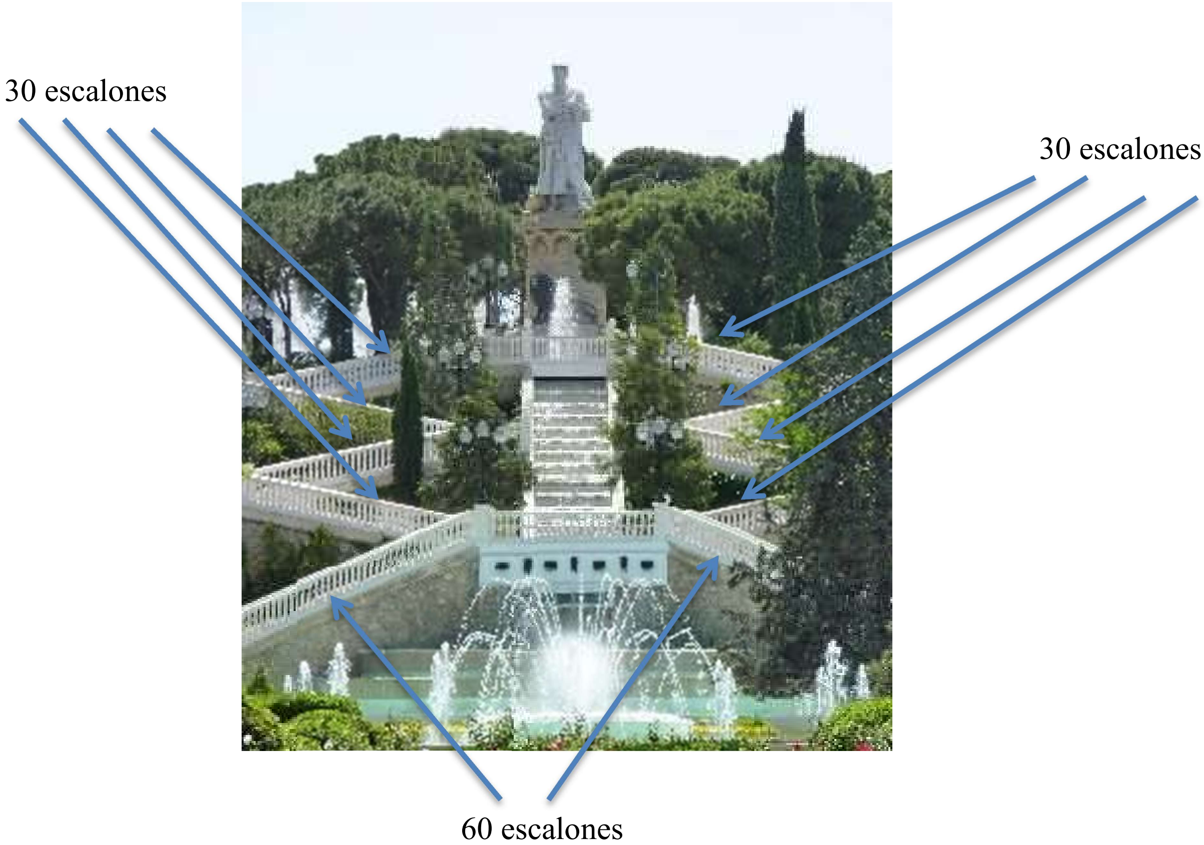
EJERCICIO 4.- (2,5 puntos) En la gráfica se muestra la altitud en función de la distancia de una etapa de la vuelta a España (ciclismo).



a) ¿Qué distancia recorren en esta etapa? ¿A qué característica de una función equivale este intervalo? (0,25 puntos).
b) ¿Cuál es la mínima altitud y la máxima que alcanzan? ¿A qué característica de una función equivale este intervalo? (0,25 puntos).
c) ¿En qué puntos corta con los ejes X e Y la etapa? ¿Qué significa que corte el eje X? ¿Y qué significa que corte el eje Y? (0,5 puntos).
d) ¿En qué tramos van cuesta arriba y en cuáles cuesta abajo? (0,5 puntos).
e) ¿Qué población está a mayor altitud y cuál a menor? ¿A qué puntos corresponden de la gráfica? (0,5 puntos).
f) ¿Qué población se encuentra en el km 25 y a qué altitud se encuentra? (0,25 puntos).

g) ¿Qué población se encuentra a una altitud de 600 m y en qué punto kilométrico se encuentra? (0,25 puntos).

EJERCICIO 5.- (2,5 puntos) Dos amigos que están en el mirador del Batallador deciden, haciendo una trayectoria circular, bajar corriendo por las escaleras, cada uno por un lado, y volver a subirlas por el otro camino para encontrarse de nuevo arriba. Si la velocidad de ambos es tal que por cada tres peldaños que recorre uno el otro recorre dos, cuando el más rápido haya vuelto arriba, ¿cuántos peldaños le quedarán por subir al otro? Realiza una gráfica de la situación.



2.- ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

El criterio de evaluación asociado a esta unidad es el Crit. MAAC. 4.1. “Conocer los elementos que intervienen en el estudio de las funciones y sus representaciones”.

Y los estándares de aprendizaje evaluables son cuatro:

- Est. MAAC. 4.1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.
- Est. MAAC 4.1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.
- Est. MAAC 4.1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.
- Est. MAAC 4.1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.

Con el **ejercicio 1** se evalúa el **campo de problemas** de "cambio entre sistemas de representación".

El **estándar de aprendizaje** relacionado con este ejercicio es: EST. MAAC. 4.1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.

Con el **ejercicio 2** se evalúa el **campo de problemas** de "cambio entre sistemas de representación".

El **estándar de aprendizaje** relacionado con este ejercicio es: EST. MAAC. 4.1.4. Asocia razonadamente expresiones analíticas a funciones dadas gráficamente.

Con el **ejercicio 3** se evalúa el **campo de problemas** de "cambio entre sistemas de representación".

El **estándar de aprendizaje** relacionado con este ejercicio es: EST. MAAC. 4.1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.

Con el **ejercicio 4** se evalúa el **campo de problemas** de "estudio de una función".

El **estándar de aprendizaje** relacionado con este ejercicio es: EST. MAAC. 4.1.2. Identifica las características más relevantes de una gráfica interpretándolas dentro de su contexto.

Con el **ejercicio 5** se evalúa el **campo de problemas** de “cambio entre sistemas de representación”.

El **estándar de aprendizaje** relacionado con este ejercicio es: EST. MAAC. 4.1.3. Construye una gráfica a partir de un enunciado contextualizado describiendo el fenómeno expuesto.

3.- ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

El **ejercicio 1** necesitará que apliquen la **técnica** de paso de enunciado a tabla y de tabla a gráfica o la técnica de paso de gráfica a tabla y de tabla a enunciado.

La **tecnología** que sostiene estas técnicas es la propia definición de función y variable dependiente e independiente.

El **estándar de aprendizaje** relacionado con este ejercicio es: EST. MAAC. 4.1.1. Interpreta el comportamiento de una función dada gráficamente y asocia enunciados de problemas contextualizados a gráficas.

Puedo esperar dos formas diferentes de resolver correctamente el ejercicio:

Método 1:

- Reconocer la variable independiente e dependiente en el enunciado (Tarea principal).
- Hacer tabla de valores (Tarea auxiliar específica).
- Para hacer la tabla de valores habrá que hacer operaciones (Tarea auxiliar general).
- Hacer gráfica a partir de la tabla de valores (Tarea auxiliar específica).
- Razonar la respuesta (Tarea auxiliar específica).

<u>Posibles errores en este método:</u>

- No identificar la variable independiente y la dependiente en el enunciado.
- Errores en las operaciones para hacer la tabla de valores.
- No saber calcular el área del cuadrado en función del lado.
- Error entre la gráfica 1 y 2 porque en x=0 las dos valen aproximadamente 2.

- No saber poner los puntos de la tabla de valores en los ejes de coordenadas para hallar la gráfica.
- No razonar la respuesta.

Método 2:

- Reconocer la variable independiente e independiente en la gráfica (Tarea principal).
- Hacer tabla de valores (Tarea auxiliar específica).
- Razonar la respuesta de asociación de la tabla con el enunciado (Tarea auxiliar específica).

Posibles errores en este método:

- No identificar la variable independiente y la dependiente en la gráfica.
- No saber hallar los puntos de la gráfica para hacer la tabla de valores.
- No saber calcular el área del cuadrado en función del lado.
- Error entre la gráfica 1 y 2 porque en x=0 las dos valen aproximadamente 2.
- No saber asociar la tabla de valores al enunciado.
- No razonar la respuesta.

El **ejercicio 2** necesitará que apliquen la **técnica** de paso de ecuación a tabla y de tabla a gráfica o la técnica de paso de gráfica a tabla y de tabla a ecuación.

La **tecnología** que sostiene estas técnicas es la propia definición de función y variable dependiente e independiente.

Puedo esperar dos formas diferentes de resolver correctamente el ejercicio:

Método 1:

- Hacer tabla de valores a partir de la ecuación (Tarea auxiliar específica).
- Para hacer la tabla de valores habrá que hacer operaciones (Tarea auxiliar general).
- Hacer gráfica a partir de la tabla de valores (Tarea principal).
- Razonar la respuesta (Tarea auxiliar específica).

<u>Posibles errores en este método:</u>

- Errores en las operaciones para hacer la tabla de valores.
- No saber poner los puntos de la tabla de valores en los ejes de coordenadas para hallar la gráfica.
- No razonar la respuesta.

Método 2:

- Reconocer la variable independiente e independiente en la gráfica (Tarea principal).
- Hacer tabla de valores (Tarea principal).
- Razonar la respuesta de asociación de la tabla con la ecuación (Tarea auxiliar específica).

<u>Posibles errores en este método:</u>

- No identificar la variable independiente y la dependiente en la gráfica.
- No saber hallar los puntos de la gráfica para hacer la tabla de valores.
- No saber asociar la tabla de valores a la ecuación.
- No razonar la respuesta.

El **ejercicio 3** necesitará que apliquen la **técnica** de paso de enunciado a ecuación, a tabla de valores y a gráfica.

La **tecnología** que sostiene estas técnicas es la propia definición de función y variable dependiente e independiente.

La forma que espero para resolver correctamente el ejercicio:

- Identificar las variables independiente y dependiente (Tarea principal).
- Hallar la ecuación de la función (Tarea principal).
- Hacer tabla de valores a partir del enunciado o de la ecuación (Tarea principal).
- Para hacer la tabla de valores habrá que hacer operaciones (Tarea auxiliar general).
- Hacer gráfica a partir de la tabla de valores (Tarea principal).

Posibles errores en este método:

- No identificar la variable dependiente e independiente.
- Errores al hallar la ecuación de la función.
- Errores en las operaciones para hacer la tabla de valores.
- No saber poner los puntos de la tabla de valores en los ejes de coordenadas para hallar la gráfica.

El **ejercicio 4** necesitará que apliquen las **técnicas** de:

- Ver en la gráfica el intervalo de valores que puede tomar x (dominio).
- Ver en la gráfica el intervalo de valores que puede tomar y (recorrido).
- Ver en la gráfica los puntos que tienen la forma (0, f(0)) y (x, 0) (cortes con los ejes).
- Ver en la gráfica los intervalos en los que la función es creciente o decreciente.
- Ver en la gráfica los puntos donde cambia la función de creciente a decreciente o de decreciente a creciente (máximos y mínimos).
- Ver en la gráfica la imagen de un punto.
- Ver en la gráfica la antiimagen de un valor.

Las **tecnologías** que sostienen estas técnicas son las propias definiciones de dominio, recorrido, crecimiento, decrecimiento, máximo, mínimo, imagen y antiimagen.

El **método** que espero para resolver correctamente el ejercicio:

- Hallar la distancia recorrida y reconocer que es el dominio (Tarea principal).
- Hallar las altitudes mínimas y máximas y reconocer que es el recorrido (Tarea principal).
- Hallar los cortes con los ejes (Tarea principal).
- Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento (Tarea principal).
- Hallar los máximos y los mínimos (Tarea principal).
- Hallar la imagen (Tarea principal).
- Hallar la antiimagen (Tarea principal).

Posibles errores en este método:

- No saber ver en la gráfica la distancia recorrida.
- No reconocer la característica dominio.
- No saber ver en la gráfica los puntos de mínima o máxima altitud.
- No reconocer la característica recorrido.
- No hallar todos los cortes con los ejes.
- No saber escribir los puntos de cortes con los ejes.
- No saber interpretar qué significa que la función corte en el eje X.
- No saber interpretar qué significa que la función corte en el eje Y.
- Errores al escribir los intervalos de crecimiento.
- Errores al escribir los intervalos de decrecimiento.
- No hallar todos los máximos y mínimos.
- Poner que hay máximo o mínimo cuando cambia de constante a creciente o decreciente.
- No escribir correctamente los puntos en los que hay máximo o mínimo.
- No saber ver en la gráfica qué es f(25).
- No saber ver en la gráfica qué es f(x) = 600.

El **ejercicio 5** evalúa el **campo de problemas** de "cambio entre sistemas de representación".

Este ejercicio necesitará que apliquen la **técnica** de cambio de enunciado a gráfica.

La **tecnología** que sostiene estas técnicas es la propia definición de función y variable dependiente e independiente.

El **método** que espero para resolver correctamente el ejercicio:

- Identificar las variables independiente y dependiente (Tarea principal).
- Hacer tabla de valores a partir del enunciado para cada amigo (Tarea principal).
- Con el número total de peldaños hallar en qué momento llega el primero y dónde se encuentra el segundo (Tarea auxiliar general).

- Para hacer la tabla de valores habrá que hacer operaciones (Tarea auxiliar general).
- Hacer gráfica a partir de la tabla de valores (Tarea principal).

Posibles errores en este método:

- No identificar las variables dependiente e independiente.
- Errores al hallar la ecuación de la función y por lo tanto donde se encuentra el segundo amigo cuando llega el primero al final.
- Errores en las operaciones para hacer la tabla de valores.
- No saber poner los puntos de la tabla de valores en los ejes de coordenadas para hallar la gráfica.

4.- ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Los criterios de calificación los he basado en el **Modelo de tercios** visto en la asignatura de Evaluación e innovación docente e investigación educativa en Matemáticas del Máster de Profesorado 2017/2018:

- Tareas principales (penalización hasta 100%).
- Tareas auxiliares específicas (penalización hasta 67% pero sigo corrigiendo).
- Tareas auxiliares generales (penalización hasta 33% pero sigo corrigiendo).

Y en el apartado anterior ya he definido lo que considero tarea principal o auxiliar en cada ejercicio.

Así, en el **ejercicio 1**, con el **método 1:**

- Tareas principales (penalización hasta 100%):
  - No reconocer las variables independiente y dependiente: - 0,5 puntos por apartado.
- Tareas auxiliares específicas (penalización hasta 67% pero sigo corrigiendo):
  - Errores en la tabla de valores: -0,25 puntos por apartado.
  - Errores al representar los valores de la tabla en los ejes de coordenadas: -0.25 puntos por apartado.
  - No razonar las respuestas: -0,25 puntos por apartado.
- Tareas auxiliares generales (penalización hasta 33% pero sigo corrigiendo):

- Errores de cálculo para hallar los valores de la tabla: -0,15 puntos por apartado.
- No saber la fórmula del área: -0,15 puntos.

Y en el **ejercicio 1,** con el **método 2:**

- Tareas principales (penalización hasta 100%):
  - No reconocer las variables independiente y dependiente: - 0,5 puntos por apartado.
- Tareas auxiliares específicas (penalización hasta 67% pero sigo corrigiendo):
  - Errores en la tabla de valores: -0,25 puntos por apartado.
  - No razonar las respuestas: -0,25 puntos por apartado.
  - No saber asociar la tabla de valores al enunciado: -0,25 puntos.
- Tareas auxiliares generales (penalización hasta 33% pero sigo corrigiendo):
  - No saber la fórmula del área: -0,15 puntos.

En el **ejercicio 2**, con el **método 1**:

- Tareas principales (penalización hasta 100%):
  - Errores al representar los valores de la tabla en los ejes de coordenadas: -0.5 puntos por apartado.
- Tareas auxiliares específicas (penalización hasta 67% pero sigo corrigiendo):
  - Errores en la tabla de valores: -0,25 puntos por apartado.
  - No razonar las respuestas: -0,25 puntos por apartado.
- Tareas auxiliares generales (penalización hasta 33% pero sigo corrigiendo):
  - Errores de cálculo para hallar los valores de la tabla: -0,15 puntos por apartado.

Y en el **ejercicio 2** con el **método 2:**

- Tareas principales (penalización hasta 100%):
  - No reconocer las variables independiente y dependiente: - 0,5 puntos por apartado.
  - Errores en la tabla de valores: -0,25 puntos por apartado.
- Tareas auxiliares específicas (penalización hasta 67% pero sigo corrigiendo):
  - No razonar las respuestas: -0,25 puntos por apartado.
  - No saber asociar la tabla de valores a la ecuación: -0,25 puntos.

- Tareas auxiliares generales (penalización hasta 33% pero sigo corrigiendo):

En el **ejercicio 3:**

- Tareas principales (penalización hasta 100%):
  - No identificar las variables dependientes e independientes: -1,5 puntos.
  - Errores en la ecuación de la función: -0,5 puntos.
  - Errores en la tabla de valores: -0,5 puntos.
  - Errores al representar los valores de la tabla en los ejes de coordenadas: -0.5 puntos.
- Tareas auxiliares generales (penalización hasta 33% pero sigo corrigiendo):
  - Errores de cálculo para hallar los valores de la tabla: -0,15 puntos.

En el **ejercicio 4:**

- Tareas principales (penalización hasta 100%):
  - No saber ver en la gráfica la distancia recorrida: -0,15 puntos.
  - No reconocer la característica dominio: -0,10 puntos.
  - No saber ver en la gráfica los puntos de mínima o máxima altitud: -0,15 puntos.
  - No reconocer la característica recorrido: -0,10 puntos.
  - No hallar todos los cortes con los ejes: -0,25 puntos.
  - No saber escribir los puntos de cortes con los ejes: -0,25 puntos.
  - No saber interpretar qué significa que la función corte en el eje X: -0,25 puntos.
  - No saber interpretar qué significa que la función corte en el eje Y: -0,25 puntos.
  - Errores al escribir los intervalos de crecimiento: -0,25 puntos.
  - Errores al escribir los intervalos de decrecimiento: -0,25 puntos.
  - No hallar todos los máximos y mínimos: -0,25 puntos.
  - Poner que hay máximo o mínimo cuando cambia de constante a creciente o decreciente: -0,5 puntos.
  - No escribir correctamente los puntos en los que hay máximo o mínimo: -0,5 puntos
  - No saber ver en la gráfica qué es f(25): -0,25 puntos.

- No saber ver en la gráfica qué es f(x) = 600: -0,25 puntos.

Y en el **ejercicio 5**:

- Tareas principales (penalización hasta 100%):
  - No identificar las variables dependientes e independientes: -2,5 puntos.
  - Errores en la tabla de valores: -1,5 puntos.
  - No saber poner los puntos de la tabla de valores en los ejes de coordenadas para hallar la gráfica: -1,5 puntos.
- Tareas auxiliares generales (penalización hasta 33% pero sigo corrigiendo):
  - Errores en la ecuación de la función: -0,75 puntos.
  - Errores de cálculo en la tabla de valores: -0,75 puntos.

J.- Bibliografía y páginas web

Aína Martínez, J.M., Alonso Borrego, J.L., Cabezón Ochoa, M.A., Fernández Rubio, J.I., García Cebrían, M.J., Herrero Izquierdo, J., Ruíz Gil, C. (2009). *Matemáticas 3º ESO*. Recuperado de http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/3esomatematicas/

Alayo, F. (1990). *The Language of Functions and Graphs.* Bilbao: Universidad del País Vasco.

Arce, M., Ortega, T. (2014). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, *8*(2), 61-73.

Arnal, A. y Beltrán, P. (2017). *Diseño, organización y desarrollo de actividades para el aprendizaje de Matemáticas*. [Apuntes académicos]. ADDUnizar.

Azcárate Giménez, C., Deulofeu Piquet, J. (1996). Funciones y gráficas. *De Colecciones Matemática: Cultura y Aprendizaje*. Madrid: Síntesis.

Grence Ruiz, T., de la Prida Almansa, C., Gaztelu Villoria, A.M., González García, A., Machín Polaina, P., Pérez Saavedra, C., Sánchez Figueroa, D. (2015). *Matemáticas Enseñanzas académicas 3º ESO. Serie Resuelve.* Madrid: Santillana.

Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la Mejora de la Calidad Educativa. *Boletín Oficial del Estado*. Madrid, 10 de diciembre de 2013, núm 295, pp. 97858-97921.

Martínez, S. (2017). Evaluación e innovación docente e investigación educativa en Matemáticas. [Apuntes académicos]. ADDUnizar.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón. *Boletín Oficial de Aragón*. Aragón, 2 de junio de 2016, núm 105, pp. 12640-13458.

Ortega, T., & Pecharromán, C. (2014). Errores en el aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. Revista de Investigación en Educación nº12 (2). 209-221.

Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 1 de marzo de 2014, núm 52, pp. 19349-19420.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Boletín Oficial del Estado. Madrid, 3 de enero de 2015, núm 3, pp. 169-546.

Sastre Vázquez, P., Rey, G., & Boubée, C. (2008). El concepto de función a través de la Historia. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática.* Vol (*16).* 141-155.

Sierra Vázquez, M., González Astudillo, M.T, López Esteban, C. (1998). Funciones: Traducción entre representaciones. *Aula*. Vol. (10). 89 – 104. Ediciones Universidad de Salamanca.

Vizmanos, J.R., Anzola, M., Bellón, M., Hervás, J.C. (2011). Matemáticas 3º ESO. Pitágoras. Madrid: Grupo SM.

K.- Anexo. Libros de texto analizados, campos de problemas en la unidad de funciones.

1.- CONCEPTO DE FUNCIÓN:

- **Dada por su enunciado:**
    - **SANTILLANA:**

1. Un cuaderno cuesta 6 €. La relación entre el número de cuadernos que se compran y su precio, ¿es una función?

A la magnitud *cantidad de cuadernos* la llamamos *x*, y toma los valores 1, 2, 3… Es la variable independiente.

La magnitud *precio*, que llamamos *y*, toma valores en función de la cantidad de cuadernos que compramos:

Si compramos 1 cuaderno $\xrightarrow{\text{Cuesta}}$ $6 \cdot 1 = 6$ €

Si compramos 2 cuadernos $\xrightarrow{\text{Cuestan}}$ $6 \cdot 2 = 12$ €

Si compramos 3 cuadernos $\xrightarrow{\text{Cuestan}}$ $6 \cdot 3 = 18$ €…

El *precio* es la variable dependiente.

A cada valor de *x* le corresponde un único valor de *y*. Por tanto, la relación es una función.

- **CIDEAD:**

Indica de forma razonada si la respuesta a las siguientes preguntas es afirmativa o negativa
Después pulsa en la flecha para ver las respuestas.

¿Los intereses de una inversión en bolsa son función del número de días que dure la inversión?

No, dos inversiones iguales durante un mismo número de días pueden producir rendimientos distintos

¿El número de accidentes de tráfico es función del número de vehículos que circulan?

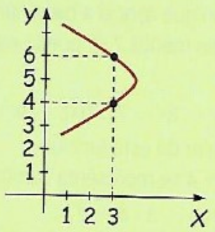
No, no se puede saber a priori cuántos accidentes se producen con un número determinado de coches

¿El caudal de agua por una tubería es función de su diámetro?

Sí, si la presión es la misma dos tuberías del mismo diámetro tienen exactamente el mismo caudal

- **<u>Dada por su gráfica:</u>**

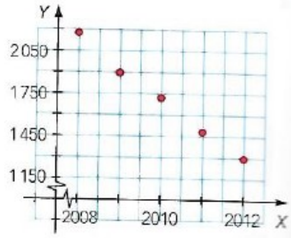
  - **<u>SANTILLANA:</u>**



Cuando x vale 3, y puede valer 4 o 6. Esta gráfica no corresponde a una función.

EJEMPLO

6. Esta gráfica muestra el número de víctimas de accidentes de tráfico en los últimos años en España.



¿La relación entre el año y el número de víctimas es una función?

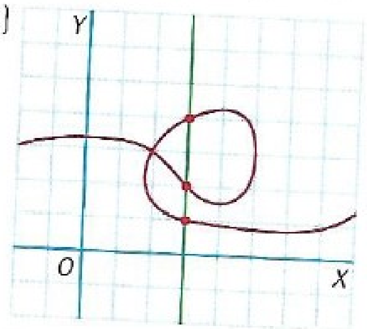
Esta relación se puede escribir como los pares: (2008, 2180), (2009, 1903), (2010, 1729)..., donde el primer número es el valor que toma la variable x (variable independiente), y el segundo, el valor de la variable y (variable dependiente).

Cada año (x) tiene un único número de víctimas (y). Es una función.

  - **<u>SM:</u>**

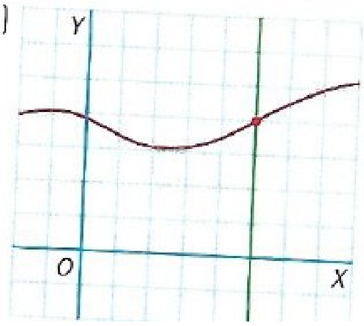
Ejemplo 5 Vamos a analizar si las correspondencias representadas en las siguientes gráficas son o no funciones.

a)



No es una función porque, por ejemplo, al valor $x = 3$ le corresponden tres valores de y: 1, 2 y 4, con lo que no se cumple la condición que define una función (a cada x, como máximo, una y).

b)



Es una función porque a cada valor de x le corresponde un único valor de y. Por ejemplo, al valor $x = 5$ le corresponde solo un valor de y: $y = 4$.